MOST K PARTNERSTVÍ

VŠP J

konference

Matematika v ekonomické praxi

9.–10. 12. 2010 | Jihlava

evropský sociální fond v ČR

EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

Vysoká škola polytechnická Jihlava

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vysoká škola polytechnická Jihlava

MATEMATIKA V EKONOMICKÉ PRAXI

Sborník příspěvků z konference

V rámci projektu **Most k partnerství – VŠP Jihlava tvoří síť**

Registrační číslo: CZ.1.07/2.4.00/12.0115

evropský sociální fond v ČR

EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

Vysoká škola polytechnická Jihlava

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Konference – Matematika v ekonomické praxi

Sborník příspěvků z konference v rámci projektu **Most k partnerství – VŠP Jihlava tvoří síť, registrační číslo: CZ.1.07/2.4.00/12.0115**

Editor: RNDr. Marie Hojdarová, CSc.
Mgr. Miroslav Hanáček

Vydavatel: Vysoká škola polytechnická Jihlava

Vydání: První

Tato publikace neprošla redakční ani jazykovou úpravou.

ISBN 978-80-87035-34-4

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Organizační a programový výbor konference

Garant konference rektor VŠPJ Ing. Jakub Novotný, Ph.D.

RNDr. Marie Hojdarová, CSc.

Ing. Martina Kuncová, Ph.D.

RNDr. Radek Stolín, Ph.D.

Ing. Ladislav Šiška, Ph.D.

Mgr. Miroslav Hanáček

Bc. Lukáš Lojda – administrátor w-sídla konference

Michaela Machovcová – kontakt

Obsah:

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Vysoká škola polytechnická Jihlava
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

ÚVOD

Vážení účastníci konference MATEMATIKA V EKONOMICKÉ PRAXI, dostává se Vám do rukou sborník příspěvků, ve kterých můžete pohlédnout na někdy možná pro vás nudnou, nezajímavou či obtížnou vědu zvanou matematika z trochu jiného úhlu - z pohledu jejího praktického využití. Široký záběr příspěvků popisujících různorodé matematické metody a postupy využitelné v praxi dokazuje, že nejde o vědu mrtvou, zastaralou či neužitečnou. Doufáme, že Vás témata zde publikovaná zaujmou a případně rozšíří Vaše obzory.

Vedení Vysoké školy polytechnické Jihlava a programový a organizační výbor konference si touto cestou dovolují poděkovat autorům všech prezentovaných a publikovaných příspěvků i všem účastníkům konference za projevenou aktivitu a zájem o tuto konferenci.

za organizační a programový výbor

Ing. Martina Kuncová, Ph.D.

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Vysoká škola polytechnická Jihlava
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

ANALYTICKÝ HIERARCHICKÝ PROCES (AHP) A JEHO MOŽNOSTI UPLATNĚNÍ PŘI HODNOCENÍ A PODPOŘE ROZHODOVÁNÍ

JAROSLAV RAMÍK *)

Abstrakt

Cílem rozhodování rozumíme určitý budoucí stav systému (okolí rozhodovatele) vyplývající z nutnosti uspokojit určité potřeby nebo plnit jisté funkce. Cíle se má dosáhnout realizací některé z variant rozhodování. Cíl rozhodování se obvykle hierarchicky rozkládá do dílčích cílů, které se transformují do podoby rozhodovacích kritérií, které mohou mít pro rozhodování rozdílnou důležitost - váhy. V metodě nazvané Analytický Hierarchický Proces (AHP) se váhy stanovují speciální metodou založenou na matici párových porovnání, přičemž se využívá vlastního vektoru této matice. Článek se zabývá možnostmi uplatnění metody AHP při hodnocení a podpoře rozhodování. Jednotlivé kroky metody AHP jsou nejprve popsány, pak jsou ilustrovány na jednoduchém příkladu hodnocení pedagogů katedry. Ilustrovaná metoda nevyžaduje speciální SW, vystačí s Excelem.

Klíčová slova (keywords)

Vícekriteriální rozhodování, Analytický Hierarchický Proces, AHP, hodnocení pedagogů katedry

ÚVOD

Rozhodování je důležité pro naše další přežití a také pro zajištění požadované kvality života. Být člověkem znamená činit rozhodnutí. Život ztrácí cenu, nejsme-li svobodní ve svých volbách.

*) Prof. RNDr. Jaroslav Ramík, CSc., Slezská univerzita v Opavě, Obchodně podnikatelská fakulta v Karviné, Univerzitní nám. 1934/3, ramik@opf.slu.cz

V souvislosti s vědeckým rozhodováním dnes vyvíjí aktivitu mnoho odborných i společenských organizací, v České republice to jsou například Česká společnost pro operační výzkum, skupiny pro psychologii rozhodování, a také rozličné firmy zabývající se tvorbou počítačových programů na podporu rozhodování (v anglosaských zemích známých jako Decision Support Systems - DSS). Konkurenční teorie rozhodování spolu zápasí o pozornost v naději, že nastaví směr vývoje budoucnosti. Užitečná teorie rozhodování však musí harmonizovat s lidskými potřebami a lidskou povahou, viz [5], [6]. Neměla by vyžadovat dlouhá léta testování a vylepšování důmyslnými technikami, ocenitelnými nejvýše specialisty v dané oblasti, viz [3].

1 PROBLÉM HODNOCENÍ A ROZHODOVÁNÍ

1.1 HODNOCENÍ PRO ROZHODOVÁNÍ

Rozhodování je důležité pro naše další přežití a také pro zajištění požadované kvality života. Být člověkem znamená činit rozhodnutí. Život ztrácí cenu, nejsme-li svobodní ve svých volbách. V souvislosti s vědeckým rozhodováním dnes vyvíjí aktivitu mnoho odborných i společenských organizací, v České republice to jsou například Česká společnost pro operační výzkum, skupiny pro psychologii rozhodování, a také rozličné firmy zabývající se tvorbou počítačových programů na podporu rozhodování (v anglosaských zemích známých jako Decision Support Systems - DSS). Konkurenční teorie rozhodování spolu zápasí o pozornost v naději, že nastaví směr vývoje budoucnosti. Užitečná teorie rozhodování však musí harmonizovat s lidskými potřebami a lidskou povahou, viz [5], [6]. Neměla by vyžadovat dlouhá léta testování a vylepšování důmyslnými technikami, ocenitelnými nejvýše specialisty v dané oblasti, viz [3].

1.2 HIERARCHIE CÍLŮ HODNOCENÍ

Jak na mikroúrovni, tak na makro-úrovni nám chybí zkušenosti vztahující se k našim cílům; nejlépe jsme na tom na mezo-úrovni, kde žijeme. Tím, že cestujeme ke hvězdám a bojujeme s viry, se učíme začleňovat „velké“ a „malé“ do našeho systému hodnot. Používáme principy hierarchického řádu, abychom zachytili a zobecnili informace tak, že mohou být aplikovány stejně na malé i velké věci, na atomy a molekuly stejně tak, jako na hvězdy a galaxie. Měřítka nám dávají moc k pochopení lidského světa. Naše mysl obsahuje vnitřní měřítko. Měřítka jsou tím, co sociologové potřebují ve svém výzkumu k vytvoření dat odvozených z názorů respondentů vhodných pro statistické zpracování. Proces hierarchizace cílů, jakož i párového porovnávání, který je základem AHP, se odlišuje od známého jednoduchého přiřazování čísel k alternativám podle jejich pořadí. Jedna věc je přiřadit číslo k měřitelnému množství jako k části celku, pracujeme-li s veličinami jako je například délka, vzdálenost, hmotnost a podobně, jiná věc je odvodit číslo z reálných skutečností, v situaci, kdy neexistuje žádný přímý způsob měření, jako např. kvalita určitého procesu. AHP je metoda zachycující vnímanou realitu systematickým způsobem odlišným od pouze na libovůli závisejícím přiřazování čísel.

1.3 PRVKY ROZHODOVÁNÍ

Cílem rozhodování rozumíme určitý budoucí stav systému (okolí rozhodovatele) vyplývající z nutnosti uspokojit určité potřeby nebo plnit jisté funkce. Cíle se má dosáhnout realizací některé z variant rozhodování. Cíl rozhodování se obvykle hierarchicky rozkládá do dílčích cílů, které se transformují do podoby rozhodovacích kritérií.

Rozhodovací kritéria mohou mít různou povahu od fyzikálních, technických nebo technologických měřitelných vlastností, přes ekonomická kritéria vyjadřovaná peněžními jednotkami až k neměřitelným subjektivním kritériím typu krása, vůně, morálka aj. Někdy u kritérií dále rozlišujeme, zda existují nezávisle na naší vůli - v tom případě se jedná o charakteristiky, eventuálně vlastnosti, jindy kritéria úmyslně vytváříme - pak hovoříme o atributech. V tomto příspěvku podrobnější členění kritérií nebude zapotřebí, vystačíme s obecným pojmem kritérium, které budeme interpretovat jako určité hodnotící hledisko, jež bereme v úvahu při rozhodování. Základem pro stanovení souboru kritérií je soubor dílčích cílů řešení rozhodovacího problému. Některé dílčí cíle se však netransformují do podoby kritérií, nýbrž do omezujících podmínek k redukci souboru rozhodovacích variant. Variantami (alternativami) mohou být nejrůznější prvky, které má smysl vzájemně porovnávat, nebo, v užším kontextu, přicházejí v úvahu pro výběr v určitém procesu rozhodování. Například zákazník se rozhoduje při koupi mezi výrobky určitého typu (automobily, počítače aj.), ředitel podniku rozhoduje mezi různými perspektivními výrobními programy, různými variantami marketingových strategií, různými kandidáty na řídicí funkce v podniku apod.

Subjektem rozhodování může být jednotlivec nebo skupina jednotlivců (podnik, instituce apod.), která rozhoduje. Protipólem subjektu rozhodování je objekt rozhodování, který představuje systém, v němž je formulován rozhodovací problém, cíl, kritéria i varianty rozhodování. Důsledky variant vyjádřené jako hodnoty kritérií jsou buď jednoznačné, nebo závisejí na stavech světa (stavech systému, scénářích apod.). Ty jsou chápány jako vzájemně se vylučující stavy té části okolí rozhodovacího systému, která je mimo kontrolu rozhodovatele. Náhodné faktory okolí se obvykle považují za (diskrétní) náhodné veličiny určující stavy světa.

2 PŘÍKLADY HODNOCENÍ Z OBLASTI VŠ

2.1 HODNOCENÍ VŠ

Veřejné vysoké školy (ev. fakulty VVŠ) v ČR chceme vyhodnotit např. pro účely jejich rozdělení do dvou skupin: „výzkumné“ a výukové“.

Veřejné vysoké školy v ČR můžeme chtít alternativně vyhodnotit např. pro účely rozdělení částky cca 1 mld. Kč na podporu nespecifického výzkumu.

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Vysoká škola polytechnická Jihlava
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

2.2 HODNOCENÍ FAKULT DANÉ VŠ

Fakulty dané VŠ chceme vyhodnotit podle (relativní) výkonnosti (kvality) v oblasti pedagogické resp. vědeckovýzkumné činnosti.

2.3 HODNOCENÍ KATEDER (ÚSTAVŮ) DANÉ FAKULTY

Katedry dané fakulty chceme vyhodnotit podle (relativní) výkonnosti (kvality) v oblasti pedagogické resp. vědeckovýzkumné činnosti.

2.4 HODNOCENÍ STUDIJNÍCH PROGRAMŮ/OBORŮ DANÉ FAKULTY/VŠ

Studijní programy realizované na dané VŠ (fakultě) chceme vyhodnotit z hlediska ekonomické efektivnosti (kvality).

2.5 HODNOCENÍ PEDAGOGŮ DANÉ FAKULTY/KATEDRY

Vědecko-pedagogické pracovníky dané fakulty (katedry) chceme vyhodnotit z hlediska jejich přínosu (kvality) pro fakultu (katedru) např. pro účelu rozdělení částky celoroční odměny, viz Obr.1.

2.6 HODNOCENÍ VÝZKUMNÝCH/ROZVOJOVÝCH PROJEKTŮ

Podané výzkumné/rozvojové projekty chceme vyhodnotit pro účely přidělení požadovaných prostředků „dobrým“ projektům.

2.7 HODNOCENÍ NABÍDEK VE VÝBĚROVÉM ŘÍZENÍ

Přijaté nabídky v konkrétním výběrovém řízení chceme vyhodnotit pro účely výběru nejlepší nabídky pro realizaci.

2.8 HODNOCENÍ UCHAZEČŮ V KONKURZU NA MÍSTO

Uchazeče přihlášené v konkurzu na danou pozici chceme vyhodnotit za účelem přijetí nejlepšího uchazeče.

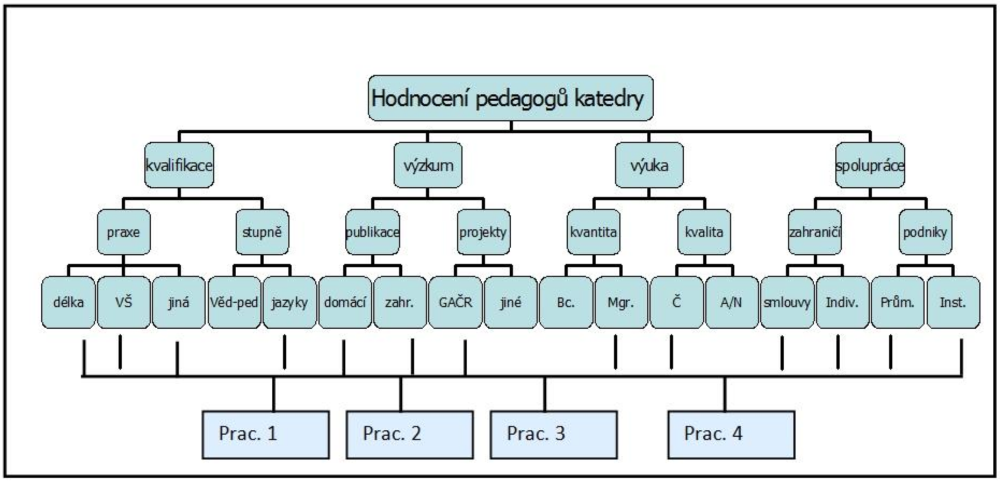
2.9 HODNOCENÍ STUDENTSKÝCH PRACÍ APOD.

Studentské práce přihlášené do soutěže o nejlepší studentskou práci chceme vyhodnotit s cílem přidělení 1., 2. a 3. ceny.

3 ANALYTICKÝ HIERARCHICKÝ PROCES – METODA VÍCEKRITERIÁLNÍHO ROZHODOVÁNÍ

Analytický hierarchický proces (AHP), jímž se zabývá tento příspěvek, byl popsán v několika knihách Thomase L. Saatyho, profesora Pensylvánské univerzity v Pittsbughu v USA a jeho spolupracovníků, a to v 80. a 90. letech, viz [1], [2]. Tato metoda je dnes široce používána v rozhodovací praxi, v česky psané odborné literatuře však relevantní publikace o AHP dosud chybí (kromě skripta [3]). Řadu let se zejména ve společenských vědách používá tzv. Saatyho metoda párového porovnání, která tvoří páteř konzistentní metodologie vícekriteriálního hodnocení nazvané Analytický Hierarchický Proces – zkráceně AHP.

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Vysoká škola polytechnická Jihlava
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Obr.1. Příklad hierarchického systému s 5 úrovněmi

AHP je ve své podstatě obecná teorie měření, tato měření kvantifikují hodnoty jak fyzikálních, technických nebo ekonomických veličin, tak subjektivních hodnocení jednotlivců pomocí přirozeného jazyka. V přístupu AHP k rozhodování jsou individuální názory vyjádřeny v organizované formě tak, aby tak sloužily k odvození priorit, z nichž je pak dále konstruováno měřítko pro společnou reprezentaci. Rozhodnutí – volba mezi nabízenými možnostmi, tj. variantami (alternativami) - doporučované na podkladě těchto priorit by mělo být „optimální“. Jednotlivým alternativám jsou v konečném kroku přiřazeny číselné priority a alternativy jsou uspořádány podle těchto priorit. Pro konkrétní rozhodnutí může sloužit nejlépe ohodnocená varianta.

Základními principy metody AHP jsou:

- ***princip hierarchie,***
- ***princip normalizace,***
- ***princip párového porovnání,***
- ***princip váženého průměru.***

Tyto principy budou podrobněji charakterizovány ve druhé části příspěvku zároveň s postupem řešení úlohy vícekriteriálního hodnocení.

4 ILUSTRATIVNÍ PŘÍKLAD VYUŽITÍ AHP

V této druhé části příspěvku uvedeme řešený ilustrativní příklad hodnocení pedagogů jisté katedry. Cílem je přiblížit metodu AHP a ukázat, jaké předpoklady a postupy používá a také zvýraznit fakt, že k její aplikaci není zapotřebí specializovaný program (např. známý Expert Choice od prof. T. Saatyho), že vystačí běžný Excel.

S odkazem na předchozí část příspěvku uvažujeme tyto základní prvky rozhodovacího (hodnotícího) problému:

- ***Varianty: fiktivní vědecko-pedagogičtí pracovníci nejmenované katedry jisté fakulty***
- ***Cíl hodnocení: hodnocení pracovníků podle kvality jejich činnosti***
- ***Kritéria: kvalifikace, výzkumná činnost, výuková činnost, praktická aplikační činnost***
- ***Hodnotící stupně jednotlivých kritérií, viz Obr. 2.***

V dalším budeme postupovat tak, že výše uvedené principy AHP budeme charakterizovat v souvislosti s řešením našeho ilustrativního příkladu.

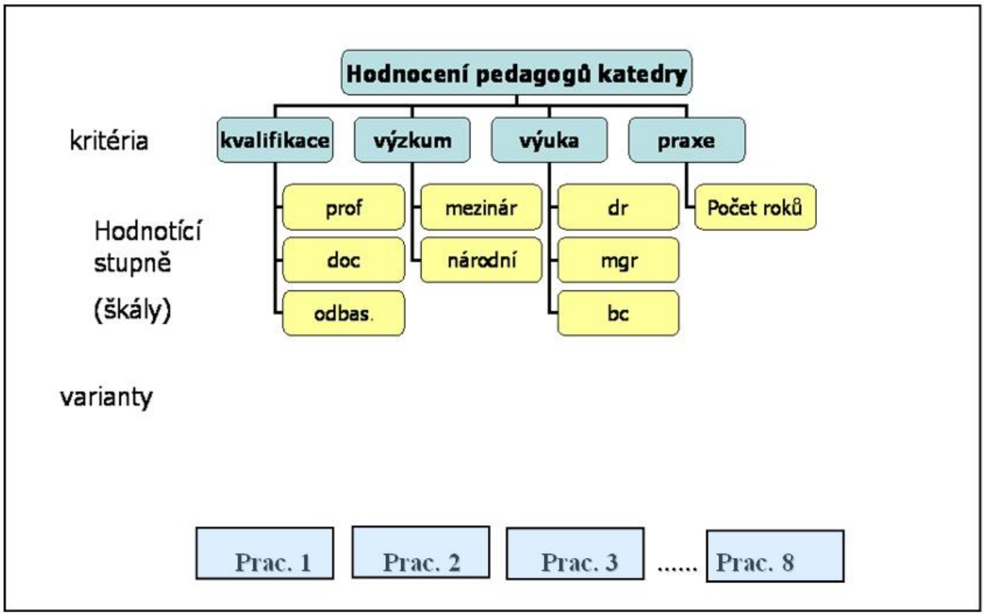
Princip hierarchie spočívá v kvantitativním ocenění vlivů prvků jisté hierarchické úrovně, řekněme n-té úrovně, na společný nadřazený prvek (o jednu úroveň nižší, tedy n-1), což lze znázornit např. takto:

úroveň n -1: **prvek B (sub)kritérium**

**/ | **

úroveň n: **prvek A1 prvek A2 prvek A3**

**/ | \\ / | \\ / | **



Obr.2. Příklad hierarchického systému se 3 úrovněmi

Zde jsou prvkům A1 až A3 přiřazeny váhy, tj. 3 kladná čísla (jejich součet je roven 1), jejichž konkrétní hodnoty jsou určeny jako:

- ***normované hodnoty kvantitativního (sub)kritéria B,***
- ***hodnoty vah z párového porovnání prvků A1 až A3.***

Princip normalizace spočívá v normování hodnocení všech variant u všech kritérií. To se pro každé kritérium provede jejich vydělením součtem hodnocení všech variant daného kritéria. Metoda AHP vyžaduje, aby byla všechna hodnocení všech variant pomocí všech kvantitativních kritérií *kladná čísla*. Pokud tato podmínka není splněna, provede se transformace původního kvantitativního kritéria na kladné hodnoty pomocí *translace*, tj. přičtením dostatečně velkého kladného čísla ke všem hodnotám tohoto kritéria. Dále je v AHP vyžadováno, aby všechna kritéria byla *maximalizační* (to znamená, že větší hodnocení je považováno za „lepší“). Pokud tato podmínka není splněna a použité kritérium je minimalizační (tj. když menší hodnota je „lepší“ než větší hodnota, např. u kritéria „cena“), potom se takové kritérium transformuje na maximalizační. Pro transformaci minimalizačního kritéria na kritérium maximalizační je v metodě AHP použita převrácená hodnota, tj. funkce $f(h) = 1/h$. Pro *kvantitativní (sub)kritérium* se původní hodnocení a získané normalizované hodnoty uspořádají do následující tabulky:

Varianta (prvek)	***Hodnota kritéria***	***Normovaná hodnota***
A*1*	h_1	$p_1 = \dfrac{h_1}{\sum h_i}$
A*2*	h_2	$p_2 = \dfrac{h_2}{\sum h_i}$
...	**...**	**...**
An	h_n	$p_n = \dfrac{h_n}{\sum h_i}$
Součet	Σh_i	***1***

V příkladu hodnocení pedagogů obdržíme pro maximalizační kritérium „praxe“ následující tabulku:

	PRAXE	PRAXE_NORM
Ped1	12	0,171
Ped2	9	0,129
Ped3	7	0,100
Ped4	4	0,057
Ped5	30	0,429
Ped6	2	0,029
Ped7	5	0,071
Ped8	1	0,014
Součet	70	1,000

Princip párového porovnání *se uplatňuje tam, kde nadřazený prvek B hodnotící hierarchie je* kvalitativním (sub)kritériem, *přitom prvky A1, A2, ... na podřízené úrovni se párově vyhodnotí s použitím speciální stupnice (tzv. Saatyho škály), která používá celočíselné hodnoty 1 až 9. Následující schéma vysvětluje slovní význam číselných hodnot, přitom liché hodnoty (1,3,5,7,9) jsou považovány za* *hlavní (důležitější), sudé hodnoty jsou upřesňující mezistupně.*

Ai „je stejně významný jako“ Aj………………....*1*

mezistupeň.. 2

Ai „je slabě významnější než“ Aj…………..……*3*

mezistupeň.. 4

Ai „je mnohem významnější než“ Aj…………....*5*

mezistupeň.. 6

Ai „je prokazatelně významnější než“ Aj…..….....*7*

mezistupeň..8

Ai „ je absolutně významnější než“ Aj…………*9*

Zdůvodnění škály:

- ***věcné – neporovnávat řádově odlišné prvky,***
- ***psychologické – pravidlo 7±2 zvládnutelných prvků.***

Při párovém porovnání prvku Ai s prvkem Aj konstatujeme, že prvek Ai je „a_{ij}“ krát významnější než Aj (vzhledem k nadřazenému prvku B), přičemž hodnota a_{ij} je číslo z množiny {1, 2, 3, …, 9}. Tuto skutečnost zapíšeme takto: (Ai, Aj) $\rightarrow a_{ij}$.

Konkrétně při párovém porovnávání kritérií Ki v našem příkladu hodnocení pedagogů katedry postupně obdržíme prvky matice párových porovnání takto:

(K1, K2) $\rightarrow a_{12}=2$; (K1, K3) $\rightarrow a_{13}=1$; (K1, K4) $\rightarrow a_{14}=3$

(K2, K3) $\rightarrow a_{23}=1/2$; (K2, K4) $\rightarrow a_{24}=2$

(K3, K4) $\rightarrow a_{34}=2$

Přitom přirozeně musí platit: $a_{11}= a_{22} = a_{33} = a_{44} = 1$, a také požadujeme, aby platilo:

$a_{ji} = 1/ a_{ij}$ pro všechna i, j .

Tato vlastnost se nazývá reciprocita*: Porovnávám-li dva prvky v opačném pořadí, je výsledkem převrácená hodnota. Výsledkem všech párových porovnání kritérií v našem příkladu hodnocení pedagogů je matice párových porovnání S z následující tabulky:*

	K1	**K2**	**K3**	**K4**
K1	**1**	**2**	**1**	**3**
K2	**1/2**	**1**	**1/2**	**2**
K3	**1**	**2**	**1**	**2**
K4	**1/3**	**1/2**	**1/2**	**1**

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0{,}5 & 1 & 0{,}5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0{,}33 & 0{,}5 & 0{,}5 & 1 \end{bmatrix}$$

Z matice párových porovnání lze získat výsledné váhy (normalizované hodnoty) výpočtem v následujících dvou krocích:

Krok 1. *Výpočet největšího vlastního čísla matice párových porovnání. (Jde o vlastní číslo s největší absolutní hodnotou. Lze ukázat, že pro reciprokou matici takové vlastní číslo vždy existuje).*

Krok 2. *Výpočet vektoru vah* w = (w_1, w_2, …, w_n) *jakožto normovaného vlastního vektoru příslušného největšímu vlastnímu číslu.*

Výpočet vektoru vah ***w*** z matice párových porovnání ***S*** bývá obvykle součástí specializovaných programů, které realizují metodu AHP, např. známý SW Expert Choice. Výpočet však lze uskutečnit také v Excelu s využitím tzv. Wielandtovy věty, viz např. [1,3]. Tato matematická věta říká, že pro vektor vah ***w*** reciproké matice párových porovnání platí:

$$w = \lim_{k \to +\infty} \frac{\boldsymbol{S}^k e}{e^T \boldsymbol{S}^k e}, \text{ kde } e = (1,1,1,...,1). \quad (1)$$

Interpretace: Pro dostatečně velké číslo *k* stačí vektor vah položit jako podíl:

$$\frac{\mathbf{S}^k e}{e^T \mathbf{S}^k e}, \qquad (2)$$

přitom $\mathbf{S}^k$ je k-tou mocninou matice **S** (ovšem počítanou s maticovým násobením), což lze v Excelu snadno uskutečnit (lze počítat pouze 2., 4., 8. atd. mocninu matice **S**).

Konkrétně v našem příkladu hodnocení pedagogů se z výše uvedené matice párových porovnání vypočítá s použitím vztahu (2) tento vektor vah kritérií:

w = (0,356; 0,194; 0,326; 0,124),

a to již pro k = 8 (s přesností na 5 desetinných míst!).

Hlavní výhodou metody AHP je to, že postup párového porovnání lze použít také v případě *kvalitativního kritéria* hodnoceného slovními nebo symbolickými výrazy, jako v našem příkladu hodnocení pracovníků katedry u kritérií „kvalifikace“, „výzkum“ a „výuka“. V tom případě se hodnotící stupně (např. prof., doc., odbas atd.) podrobí párovému porovnání, jehož výsledkem budou číselné hodnoty – váhy přiřazené hodnotícím stupňům.

Podívejme se na náš příklad: Význam stupňů hodnocení kritéria „kvalifikace“ ohodnotíme pomocí párového porovnání např. takto:

	prof	***doc***	***odbas***
prof	***1***	***3***	***7***
doc	***1/3***	***1***	***5***
odbas	***1/7***	***1/5***	***1***

S použitím vztahu (2) vypočítáme vektor vah hodnotících stupňů:

$w_{\text{kvalif}} = (w_{\text{prof}}, w_{\text{doc}}, w_{\text{odbas}})$ = (0,649; 0,279; 0,072).

Důležitost stupňů hodnocení kritéria „výzkum“ ohodnotíme pomocí párového porovnání např. takto:

	mezinár.	***národní***
mezinár.	***1***	***3***
národní	***1/3***	***1***

Opět s použitím vztahu (2) vypočítáme vektor vah hodnotících stupňů:

$w_{vyzkum} = (w_{mezinar}; w_{narodni}) = (0{,}75; 0{,}25)$

Stupně hodnocení kritériem „výuka“ ohodnotíme pomocí párového porovnání např. takto:

	dr	***mgr***	***bc***
dr	***1***	***3***	***7***
mgr	***1/3***	***1***	***3***
bc	***1/7***	***1/3***	***1***

Nakonec s použitím vztahu (2) vypočítáme také vektor vah hodnotících stupňů:

$w_{vyuka} = (w_{dr}; w_{mgr}; w_{bc}) = (0{,}669; 0{,}243; 0{,}088)$.

Tímto způsobem se z kvalitativních kritérií stanou vlastně kritéria kvantitativní. Z původní vstupní tabulky dat:

Var.\ Krit.	KVALIFIK	VYZKUM	VYUKA	PRAXE
Ped1	PROF	MEZINAR	DR	12
Ped2	DOC	DOMACI	MGR	9
Ped3	ODBAS	MEZINAR	MGR	7
Ped4	ODBAS	DOMACI	MGR	4
Ped5	PROF	DOMACI	MGR	30
Ped6	ODBAS	DOMACI	BC	2
Ped7	ODBAS	MEZINAR	MGR	5
Ped8	ODBAS	DOMACI	BC	1

obdržíme po dosazení výše vypočítaných vah následující tabulku transformovaných dat:

Var.\ Krit.	KVALIFIK	VYZKUM	VYUKA	PRAXE
Ped1	0,649	0,75	0,669	0,171
Ped2	0,279	0,25	0,243	0,129
Ped3	0,072	0,75	0,243	0,100
Ped4	0,072	0,25	0,243	0,057
Ped5	0,649	0,25	0,243	0,429
Ped6	0,072	0,25	0,088	0,029
Ped7	0,072	0,75	0,243	0,071
Ped8	0,072	0,25	0,088	0,014

Princip váženého průměru se použije v procesu výsledného vyhodnocení variant, nazývaném *syntéza*. U hierarchického systému se 3 hierarchickými úrovněmi: cíl, kritéria, varianty se výsledné hodnocení každé varianty obdrží jako vážený průměr normalizovaných hodnocení této varianty jednotlivých kritérií, přitom jako váhy tohoto váženého průměru slouží váhy kritérií získané z matice párových porovnání (důležitosti – významnosti) jednotlivých kritérií. Každému hodnocenému pedagogovi v našem příkladu bude přiřazeno výsledné hodnocení (tj. výsledná váha) $v(\text{Ped } i)$, $i = 1,2,...8$:

$v(\text{Ped } i) = 0{,}356.w_{\text{kvalif}}(\text{Ped } i) + 0{,}194.w_{\text{vyzkum}}(\text{Ped } i) + 0{,}326.w_{\text{vyuka}}(\text{Ped } i) + 0{,}124.w_{\text{praxe}}(\text{Ped } i)$

V následující tabulce k příkladu hodnocení 8 fiktivních pedagogů jisté (fiktivní) katedry jsou výsledná hodnocení pedagogů uspořádána od nejlepšího k nejhoršímu:

Var.\ Krit.	KVALIFIK	VYZKUM	VYUKA	PRAXE	VYSL.HOD.	PORADI
Ped1	0,649	0,75	0,669	0,171	0,616	1
Ped5	0,649	0,25	0,243	0,429	0,412	2
Ped3	0,072	0,75	0,243	0,100	0,263	3
Ped7	0,072	0,75	0,243	0,071	0,259	4
Ped2	0,279	0,25	0,243	0,129	0,243	5
Ped4	0,072	0,25	0,243	0,057	0,160	6
Ped6	0,072	0,25	0,088	0,029	0,106	7
Ped8	0,072	0,25	0,088	0,014	0,105	8
váhy	0,356	0,194	0,326	0,124		

Konečný výsledek hodnocení: Nejlépe je hodnocen pedagog Ped1 s výsledným hodnocením 0,616 , dále je to Ped5 s výsledným hodnocením 0,412, atd., viz výše uvedená tabulka.

5 ZÁVĚR

V tomto článku jsme chtěli upozornit na existující metodu vícekriteriálního rozhodování (hodnocení) nazývanou Analytický hierarchický proces (AHP), která má následující vlastnosti:

- ***AHP je konzistentní metodologie využívající hierarchizace hodnoceného problému a párového porovnání ke kvantifikaci kvalitativních hodnocení.***
- ***Výsledkem hodnocení prvků pomocí AHP je přiřazení vah*** v_i ***všem hodnoceným prvkům, (***$\sum v_i = 1$***) pomocí nichž lze prvky uspořádat.***
- ***AHP je nástroj vhodný k hodnocení různých aspektů (subsystémů) hodnocení kvality na VŠ.***
- ***AHP je nástroj vhodný pro podporu rozhodování na všech stupních řízení.***

Zároveň jsme chtěli tuto metodu demonstrovat na jednoduchém a srozumitelném příkladu, a to bez použití specializovaného SW, pouze s využitím Excelu.

LITERATURA

[1] Saaty, T.L., *The Analytical Hierarchy Process*. McGraw Hill, New York, 1980.

[2] Saaty, T. L., *Multicriteria decision making - the Analytical Hierarchy Process*. Vol. I., RWS Publications, Pittsburgh, 1991.

[3] Ramík, J., *Vícekriteriální rozhodování – analytický hierarchický proces*. Skriptum, SU OPF Karviná, Karviná 1999. ISBN 80-7248-047-2.

[4] Ramík, J., Perzina, R., *Moderní metody rozhodování*. SU OPF Karviná, Karviná 2008. ISBN 978-80-7248-497-3.

[5] Fotr, J., Dědina, J., Hrůzová, H., *Manažerské rozhodování*. Ekopress, Praha, 2003.

[6] Fotr, J., Píšek, M., *Exaktní metody ekonomického rozhodování*. Academia, Praha, 1996.

MODELY DODAVATELSKÝCH ŘEŤEZCŮ A SÍTÍ

PETR FIALA *)

Abstrakt

V současném produkčním managementu se stále rozšiřují hranice systému, které se berou v úvahu při hledání konkurenčně schopných strategií. Pozornost je věnována managementu dodavatelských řetězců, které propojují všechny účastníky od počátečních dodavatelů surovin až po dodání produktů koncovým zákazníkům. V současné době se mění charakteristiky dodavatelských řetězců, kde hlavním akcentem je složitější struktura dodavatelských sítí. Modelování a simulace jsou klíčové přístupy pro analýzu a zlepšování produkčních systémů, které mohou ve spojení s moderní informační a komunikační technologií pomoci řešit celou řadu manažerských problémů.

Klíčová slova (keywords)

Dodavatelská síť, dodavatelský řetězec, komunikace, kooperace, koordinace, modely, optimalizace, sdílení informací, simulace

ÚVOD

Management dodavatelských řetězců (Supply Chain Management) je bouřlivě se vyvíjející disciplína, využívající koncepce, které byly vyvinuty v různých jiných disciplínách jako je logistika, marketing, finanční management, operační management, informační systémy, ekonomie, systémová dynamika a operační výzkum. Kvalita managementu dodavatelského řetězce je považována za klíč k budoucí konkurenceschopnosti řetězce.

---

*) Petr Fiala, Prof. RNDr. Ing., CSc., MBA, katedra ekonometrie, VŠE, nám. W. Churchilla 4, 13067 Praha 3, telefon: 224095447, fax: 224095423, e-mail. pfiala@vse.cz

Modelování dodavatelských řetězců je častým tématem konferencí a článků v časopisech zaměřených na operační výzkum. Tato oblast zahrnuje fáze od vlastních návrhů dodavatelských řetězců, přes jejich řízení, hodnocení výkonnosti až po jejich zlepšování. Cílem článku je upozornit na některé základní problémy dodavatelských řetězců a nástroje, které poskytuje operační výzkum pro jejich modelování, optimalizaci a simulaci.

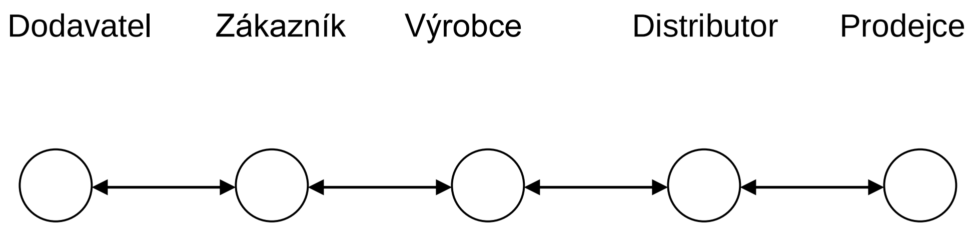
1 DODAVATELSKÉ ŘETĚZCE A SÍTĚ

V systémovém pojetí je možno podnik brát jako otevřený produkční systém, který vstupy ze svého okolí transformuje na výstupy, které předává zpět svému okolí. Okolí poskytuje také zpětnou vazbu produkčnímu systému. Dodavatelské řetězce směřují za hranice podniků a snaží se koordinovat akce a kooperovat při produkci se svými dodavateli a zákazníky a tím optimalizovat chod celého dodavatelského řetězce.

Dodavatelský řetězec je definován jako systém, který se skládá z řady subjektů, mezi které patří:

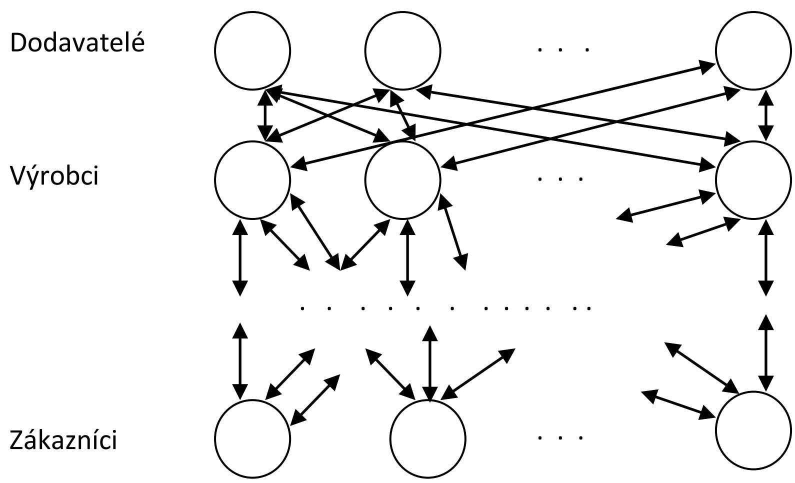
- dodavatelé,
- výrobci,
- distributoři,
- prodejci,
- zákazníci.

Struktura dodavatelského řetězce je dána jeho jednotkami a vazbami mezi nimi, jak je znázorněna na Obr. 1.



Obr. 1. Struktura dodavatelského řetězce

Hovoří se sice o řetězcích, ale tyto řetězce se utvářejí v síťovém prostředí množiny dodavatelů, zpracovatelů, distributorů, zákazníků atd., mezi kterými existuje řada možných vazeb. Firmy se propojují do síťových struktur, proto je lepší popisovat celou strukturu jako síť (viz Obr. 2).



Obr. 2. Síťová struktura

Dodavatelský řetězec je vícestupňový systém, od horního stupně dodavatelů ke spodnímu stupni koncových zákazníků. Mezi dvěma sousedními stupni jsou dodavatelsko-odběratelské vztahy. Mezi stupni dodavatelského řetězce v obou směrech proudí:

- materiálové toky,
- finanční toky,
- informační toky,
- rozhodovací toky.

Materiálové toky zahrnují toky nových produktů směrem od dodavatelů k zákazníkům a opačné toky vracení, servisu, recyklace a likvidace produktů. Finanční toky zahrnují různé druhy plateb, úvěry, toky plynoucí z vlastnických vztahů atd. Informační toky propojují systém informacemi o objednávkách, dodávkách, plánech atd. Rozhodovací toky jsou posloupnosti rozhodnutí účastníků ovlivňující celkovou výkonnost řetězce.

Integrace dodavatelských řetězců je klíčovým faktorem úspěchu při jejich řízení. Při integraci dodavatelských řetězců se uplatňují principy:

- komunikace,
- koordinace,
- kooperace.

Jednotky a celý řetězec mohou mít výhody ze vzájemné komunikace, koordinace chování a kooperativního řešení problémů. Komunikace mezi jednotlivými jednotkami vede ke sdílení informací. Nežádoucí efekty je možno potlačit včasným vzájemným sdělováním informací o plánovaných akcích, poptávkových prognózách a kapacitách jednotlivých členů systému. Koordinace akcí jednotek dodavatelského řetězce přispívá k lepší výkonnosti celého systému. Kooperace znamená společné řešení problémů, při kterém může nastat synergický efekt, kdy efektivnost celého řetězce je vyšší než souhrn efektivností všech jeho částí.

2 MODELOVÝ RÁMEC

Síťové vztahy v dodavatelských řetězcích jsou velmi komplexní, zahrnující řadu vlastností a faktorů. Je téměř nemožné vyvinout jeden obecný model, který by zachycoval všechny aspekty dodavatelských řetězců. To vede k závěru, že je potřeba vytvořit globální modelový rámec se soustavou propojených sub-modelů jako obecného systému pro podporu rozhodování pro navrhování, řízení a optimalizaci dodavatelských řetězců. Tyto modely musí být konzistentní pro zpracování konzistentních dat. Každý model by se měl zaměřit na reprezentaci několika faktorů, ale musí být dostatečně flexibilní, aby mohl být v interakci s ostatními modely.

Prvním aspektem při navrhování dodavatelských řetězců a sítí je určení typu modelu. Vytvořený model je matematickou reprezentací reálného dodavatelského řetězce. Experimentováním s modelem můžeme sledovat chování řetězce. Pokud je model dostatečně přesný, je možno implementovat závěry z analýzy modelu na reálný dodavatelský řetězec nebo síť a dostat podobné výsledky.

Modely dodavatelských řetězců a sítí se mohou lišit v řadě aspektů, jako je rozlišovací úroveň, zahrnutí času do modelu, měřítka výkonnosti atd. Pro analyzování modelů se používají následující základní přístupy:

- optimalizace,
- simulace,
- heuristiky.

Mezi základní charakteristické rysy pro modelování problémů dodavatelských řetězců patří:

- síťové prostředí,
- dynamické prostředí,

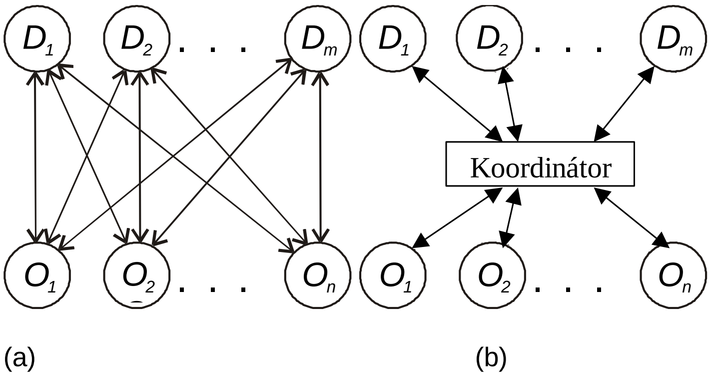
- neurčitost,
- optimalizace systému,
- větší počet rozhodujících subjektů,
- vícekriteriální rozhodování.

Síťové prostředí

Pro modelování síťového prostředí pro vytváření produkčních systémů je možno použít řadu nástrojů teorie grafů a sítí. Uzly grafu v tomto případě reprezentují skupiny dodavatelů, výrobců, distributorů, zákazníků, ale také produktů, geografická umístění atd. Hrany představují možnosti propojení a možné vztahy mezi nimi. Určitým uzlem může procházet několik řetězců. Klasické úlohy nalezení optimálních cest a optimálních toků na síti zde mohou být použity pro řešení dílčích problémů síťových produkčních systémů jako je např. nejrychlejší cesta produktu od dodavatele až ke koncovému zákazníkovi nebo optimalizace materiálových, informačních a finančních toků.

Struktura dodavatelských řetězců je důležitým faktorem pro výkonnost celého řetězce. Struktura ovlivňuje informační toky a různé úrovně koordinace a kooperace. Síťová struktura byla graficky reprezentována na Obr. 2. Mezi dvěma po sobě následujícími vrstvami existují dodavatelsko-odběratelské vztahy. Jednotky v dodavatelských řetězcích jsou právně samostatné. Dodavatelsko-odběratelské vztahy jsou brány buď jako centralizované nebo jako decentralizované (viz Obr. 3). Decentralizovaný systém způsobuje neefektivnost v dodavatelských řetězcích. Plně centralizovaný systém může být považován za situaci vhodnou pro benchmarking.

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
VŠP Vysoká škola polytechnická Jihlava
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Obr. 3. Decentralizované (a) a centralizované (b) dodavatelsko-odběratelské vztahy

Dynamické prostředí

Dodavatelské řetězce operují v silně dynamickém prostředí. Probíhá neustálá změna ve složení systému a vztazích mezi prvky, možných způsobech výroby a distribuce produktů. Některé nové subjekty se stávají a jiné přestávají být členy dodavatelských sítí. Dynamicky se vyvíjí parametry systému, jako jsou poptávka, ceny, objednávky, zásoby, náklady. Pro vyjádření dynamičnosti v systému je možno využít aparátu diferenciálních a diferenčních rovnic.

Neurčitost

Dalším faktorem, který silně ovlivňuje fungování dodavatelských řetězců je neurčitost, kterou je zatížena řada parametrů systému. Nevýhodou řady vytvářených modelů dodavatelských řetězců je skutečnost, že ve formulaci není obsažena řada nejistot. Pro modelování neurčitosti je možno využít aparátu stochastických modelů, brát proměnné jako náhodné veličiny, provádět simulační experimenty. Faktor nejistoty může být analyzován pomocí specifikace různých scénářů a analýzou citlivosti modelu.

Optimalizace systému

Role optimalizačních modelů je podstatná pro poskytování efektivních nástrojů podpory rozhodování při navrhování a řízení dodavatelských řetězců. Cílem je optimalizovat systém jako celek a nikoliv jeho jednotlivé části. Problémy se dají formulovat jako úlohy matematického programování. Vytvářené modely jsou často formulovány jako úlohy smíšeného celočíselného programování s dalšími již zmíněnými omezeními a faktory, jejich řešení však může být značně obtížné. Měla by být vytvořena struktura, která by obsahovala balík algoritmů optimalizačních a heuristických, simulační techniky pro stochastické systémy a řízení databází s konzistentními daty pro modely.

Větší počet rozhodujících subjektů

Charakteristickým znakem síťových produkčních systému je existence většího počtu rozhodujících subjektů. Tyto systémy jsou tvořeny samostatnými podniky, které jsou však propojeny vazbami spolupráce. Při vytváření síťových vztahů mezi prvky systému dochází k vyjednávání při vytváření dodavatelsko-odběratelských smluv. Tyto smlouvy mohou být krátkodobé, ověřující možnosti a příležitosti pro budoucí spolupráci, a dlouhodobé, vytvářející určitou stabilitu v systému. Každý z účastníků má svoji vyjednávací sílu, ale vyjednávání probíhá v prostředí vzájemného sdílení informací a mělo by vést ke kooperativnímu rozhodování se synergickým efektem. Pro zahrnutí většího počtu účastníků do rozhodování je k dispozici řada modelů teorie her a modelů vyjednávání.

Vícekriteriální rozhodování

Další oblastí modelování je rozhodovací proces, kdy jsou podle více kritérií vybírány výrobní technologie, skladovací technologie, způsoby dopravy, rozhodování typu koupit či vyrábět, outsourcing atd.

Mezi základní kritéria patří kvantita, kvalita, náklady a čas. Modely vícekriteriálního rozhodování slouží jako základ systémů pro podporu rozhodování. Mezi jejich rysy by měla patřit snadná použitelnost a pochopitelnost, uživatelská přívětivost, grafická reprezentace výsledků atd.

3 DÍLČÍ MODELY DODAVATELSKÝCH ŘETĚZCŮ A SÍTÍ

Dále jsou uvedeny některé typické problémy, koncepce a modely, které využívají informací pro koordinaci aktivit a kooperaci členů dodavatelských řetězců.

3.1 EFEKT BIČE

Jedním ze základních fenoménů dodavatelských řetězců je tzv. „efekt biče“ (bullwhip-effect), kdy při lokální informaci a lokálně omezeném rozhodování malé výkyvy v poptávce koncového zákazníka vedou ke stále větším výkyvům v objemech objednávek ve vyšších vrstvách řetězce. To je způsobeno vytvářením zbytečných bezpečnostních zásob podél celého řetězce. Tím vznikají zbytečné náklady, které se koncepce řízení dodavatelských řetězců snaží minimalizovat. Analýza příčin a doporučení pro snížení vlivu efektu biče je příležitostí pro modelové techniky. Mezi nejznámější příčiny efektu biče patří:

- informační asymetrie,
- způsob prognózování poptávky,
- dodací lhůty,
- velikost dodávek,
- výpadky v dodávkách,
- výkyvy cen.

Použijeme jednoduchý model dvoustupňového dodavatelského řetězce s jedním obchodníkem a jedním výrobcem. Zákaznická poptávka v čase je nezávislá a identicky rozdělená náhodná veličina

$$D_t = \mu + u_t .$$

Obchodník sleduje poptávku D_t a zadává objednávku q_t u výrobce. Dodací lhůta pro obdržení dodávky je L. Obchodník používá pro prognózování metodu klouzavých průměrů s p pozorováními

$$\hat{\mu}_t = \frac{\sum_{i=1}^{p} D_{t-i}}{p} .$$

Pro kvantifikaci vzrůstu variability je nutné porovnat rozptyl objednávek q_t vzhledem k rozptylu poptávky D_t. Dá se dokázat vztah (viz Tayur 1999):

$$\frac{Var(q)}{Var(D)} \geq 1 + \frac{2L}{p} + \frac{2L^2}{p^2}$$

Na tomto jednoduchém dvoustupňovém modelu můžeme demonstrovat příčiny. Metoda prognózování poptávky ovlivňuje variabilitu objednávek. Ze vzorce je např. vidět, že vzrůst variability je klesající funkcí počtu pozorování p a rostoucí funkcí dodací lhůty L. Delší dodavatelské lhůty zvyšují požadované zásoby.

Sdílení informací o zákaznické poptávce má vliv na efekt biče. Uvažujme k-stupňový dodavatelský řetěz s decentralizovanou informací a dodacími lhůtami L_i mezi stupněm i a i+1. Vzrůst variability objednávek je multiplikativní na každém stupni dodavatelského řetězce

$$\frac{Var(q^k)}{Var(D)} \geq \prod_{i=1}^{k} \left(1 + \frac{2L_i}{p} + \frac{2L_i^{\,2}}{p^2}\right).$$

V případě centralizované informace, jestliže obchodník poskytne každému stupni úplnou informaci o zákaznické poptávce, vzrůst variability objednávek je aditivní:

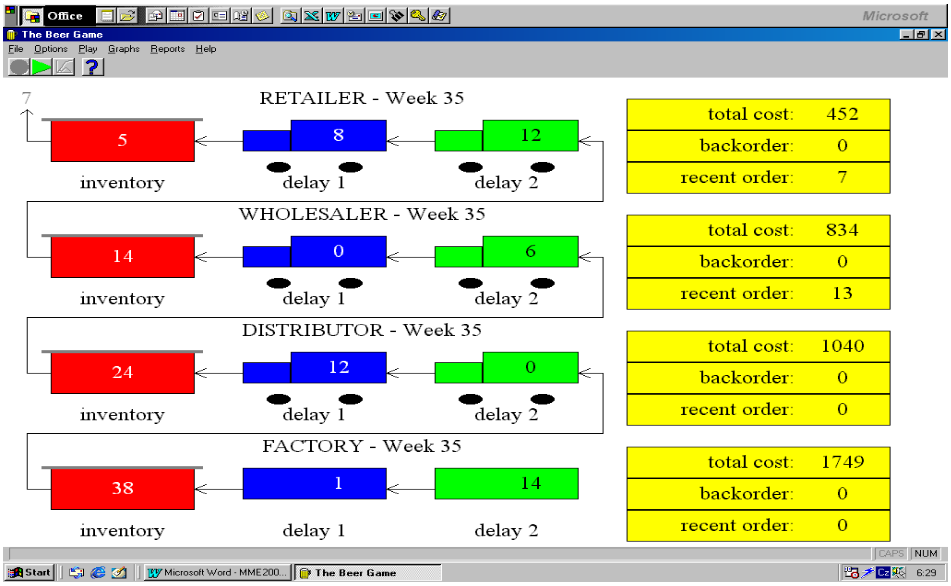
$$\frac{Var(q^k)}{Var(D)} \geq 1 + \frac{2(\sum_{i=1}^{k} L_i)}{p} + \frac{2(\sum_{i=1}^{k} L_i)^2}{p^2}$$

Poslední tři příčiny v seznamu vedou k porušování objednávek. Objednávání v dávkách je založeno na dobře známém modelu **EOQ** (Economic Order Quantity). Rozptyl objednávek se zvyšuje s velikostí objednávek. Výpadky v dodávkách rovněž ovlivňují chování obchodníka. Při očekávaných výpadcích objednává obchodník více a porušuje pravidelný tok a tím zvyšuje variabilitu. Výkyvy v cenách, např. v důsledku reklamních akcí, mohou rovněž vést k vyšší poptávce během akce a nižší poptávce po akci a tím zvyšují variabilitu objednávek.

Analýza příčin efektu biče vedla k návrhům na snížení jeho vlivu v dodavatelských řetězcích:

- snížení nejistoty,
- snížení variability poptávky,
- zkrácení dodacích lhůt,
- strategické partnerství.

Snížení nejistoty v celém dodavatelském řetězci centralizací informace o zákaznické poptávce je nejčastějším návrhem na snížení vlivu efektu biče. Avšak i když každý stupeň řetězce bude používat stejná data, stejné metody prognózování a stejné metody objednávání, efekt biče bude působit i nadále. Snížení variability zákaznické poptávky znamená používat správnou marketingovou strategii. Eliminováním cenové propagace např. pomocí strategie **EDLP** (Every Day Low Pricing), je možné eliminovat dramatické změny v poptávce. Delší dodací lhůty zvyšují variabilitu způsobenou prognózováním poptávky. Zkracování dodacích lhůt může významně ovlivnit efekt biče. Strategické partnerství znamená kooperaci a koordinaci akcí v rámci celého dodavatelského řetězce. Očekávaným výsledkem je vzájemně prospěšné partnerství typu výhra-výhra, které vytváří synergický efekt, kdy celý řetězec je efektivnější než součet jeho jednotlivých částí. Vztahy partnerství jsou založeny na dodavatelských kontraktech, které jsou hodnoceny podle více kritérií, jako je kvantita, kvalita, čas, náklady atd. Existují různé přístupy pro modelování vícekriteriálního vyjednávacího procesu k dosažení konsensu mezi účastníky.



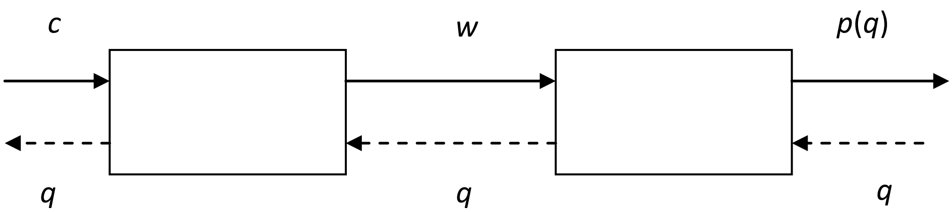
Obr.4. Pivní hra

Pro experimentální a demonstrační důvody je možno použít počítačovou verzi tzv. pivní hry (viz Simchi-Levi 1999). Zjednodušený řetězec se skládá z jedné maloobchodní jednotky, jedné velkoobchodní jednotky, jednoho distributora a jednoho pivovaru (viz Obr. 4). V každém časovém okamžiku se každá jednotka snaží uspokojit poptávku následující jednotky. Existují možnosti modelovat poptávku, vybrat různé metody zásobování, měnit dodací lhůty, vybrat decentralizovaný nebo centralizovaný typ informace nebo způsob rozhodování a tím demonstrovat vliv těchto faktorů na efekt biče.

3.2 PROBLÉM DVOJÍ ZISKOVÉ MARŽE

Problém dvojí ziskové marže je rovněž velmi dobře známým případem neefektivnosti dodavatelských řetězců (viz Tayur 1999). Tento problém vzniká v situaci, kdy se zisk dodavatelského řetězce dělí mezi dva nebo více účastníků, z nichž alespoň jeden ovlivňuje poptávku. Každý účastník uvažuje jen vlastní zisk a nebere v úvahu zisk celého řetězce.

Uvažujme jednoduchý řetězec s dodavatelem a prodejcem (viz Obr. 5), který prodává produkt. Dodavatel vyrábí každou jednotku při nákladu c a prodává každou jednotku za velkoobchodní cenu w. Prodejce objednává množství q a prodává q jednotek za cenu $p(q)$, kde $p(q)$ je klesající, konkávní a dvakrát diferencovatelná inverzní funkce k funkci poptávky.



Obr. 5. Dvojí marže

Centralizované řešení (toto řešení je označováno jako první nejlepší) předpokládá, že existuje koordinátor, který má úplnou informaci a řídí celý dodavatelský řetězec při maximalizaci zisku dodavatelského řetězce

$$z(q) = q\,(p(q) - c)\ .$$

Řešení tohoto problému označme q^0.

Decentralizované řešení předpokládá, že účastníci nemají úplnou informaci a snaží se maximalizovat svůj vlastní zisk. Zisky prodejce a dodavatele jsou

$$z_p(q) = q\,(p(q) - w),$$

$$z_d(q) = q\,(w - c).$$

Řešení tohoto problému označme q^*.

Jestliže se centralizované a decentralizované řešení liší, lze zkoumat, jak modifikovat chování účastníků, aby nové decentralizované řešení odpovídalo centralizovanému řešení. Může být dokázáno, že prodejce objednává méně než je optimální množství z hlediska celého řetězce ($q^0 > q^*$), kdy dodavatel má kladný zisk a platí

$$z(q^0) > z_p(q^*) + z_d(q^*).$$

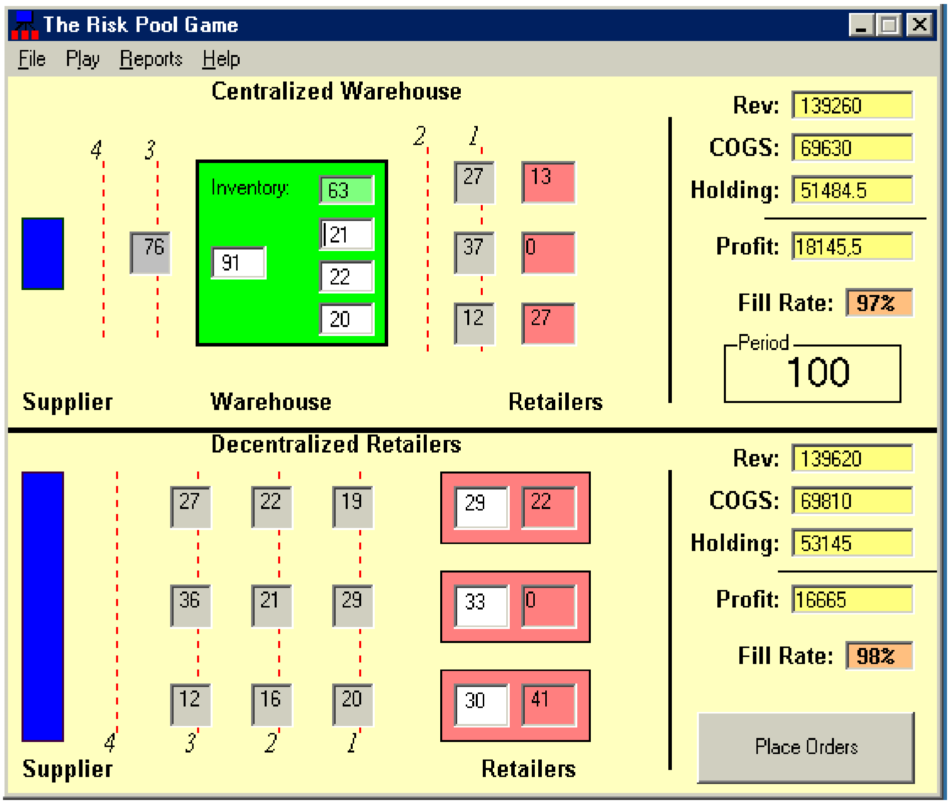
Jedno z možných řešení problému dvojí ziskové marže je stanovení ceny podle mezních nákladů ($w = c$), ale dodavatel má v tomto případě nulový zisk. Lepším řešením je uzavření kontraktu na sdílení zisku, kdy dodavatel získá $vz(q)$ a prodejce získá $(1-v)z(q)$, kde $0 \leq v \leq 1$. Velkoobchodní cena w je potom nepodstatná pro oba účastníky a dodavatelský řetězec dosáhne maximální zisk.

3.3 SDÍLENÍ RIZIKA

Sdílení rizika je zajímavá koncepce v řízení dodavatelských řetězců. V dodavatelských řetězcích je variabilní poptávka po produktech. Je možno analyzovat vztahy mezi dodavatelem a prodejci a porovnat decentralizovaný distribuční systém se samostatnými sklady pro každého prodejce a centralizovaný distribuční systém se společným skladem pro všechny prodejce. Koncepce sdílení rizika vychází z toho, že variabilita poptávky je snižována agregací poptávky. Je pravděpodobné, že vysoká poptávka u jednoho prodejce bude vyrovnána nižší poptávkou u jiného prodejce. Snížení variability umožňuje snížit bezpečnostní zásoby a tím i průměrné zásoby a skladovací náklady. Realokace zásob není možná u decentralizovaných systémů, kde různé sklady jsou k dispozici pro různé prodejce. Výhoda ze sdílení rizika roste s vyšším variačním koeficientem poptávky a s rostoucí negativní korelací mezi poptávkami u různých prodejců.

Existuje i počítačová verze hry pro demonstraci efektů ze sdílení rizika (viz Obr. 6), která porovnává centralizovaný a decentralizovaný systém při nastavení možností:

- počátečních zásob,
- parametrů náhodné poptávky,
- strategií doplňování zásob,
- struktury nákladů.



Obr. 6. Sdílení rizika

4 ZÁVĚR

V dodavatelských řetězcích existuje řada neefektivností, které snižují celkovou výkonnost řetězce. Tyto neefektivnosti jsou způsobeny chováním členů řetězců, kteří se rozhodují pouze podle lokálních zájmů. Jednotlivé problémy a jejich modely ukazují na možnost zvýšení efektivnosti dodavatelského řetězce v důsledku sdílení informace, koordinace akcí či kooperativního řešení problémů účastníky dodavatelského řetězce.

Prvním předpokladem pro změnu chování je výměna a sdílení informací mezi členy řetězce. Nahradit zbytečné přesunování materiálových toků posílením informačních toků. Komunikace mezi partnery umožňuje koordinaci aktivit a kooperaci partnerů při společném řešení problémů s využitím synergických efektů. Vzájemné vztahy mezi partnery tvoří prostředí, ve kterém jsou využívány informační a komunikační technologie a na druhé straně tyto technologie umožňují vytvářet nové prostředí pro rozšiřování vztahů mezi partnery.

Tak jako dochází k integraci dodavatelských řetězců, měly by být jednotlivé modely dílčích situací agregovány do společného modelového rámce, který by zachycoval podstatné charakteristické rysy problémů dodavatelských řetězců.

Poděkování

Článek byl vypracován za podpory grantu GAČR P402/10/0197

LITERATURA

[1] Ayers, J. B.(2001): Handbook of Supply Chain Management. St. Lucie Press, Boca Raton.

[2] *Fiala*, *P*. (2005): Information sharing in supply chains. Omega 33,419 – 423.

[3] Fiala, P. (2005): Modelování dodavatelských řetězců. Professional Publishing, Praha.

[4] Fiala, P. (2009): Dynamické dodavatelské sítě. Professional Publishing, Praha.

[5] Chopra, S., Meindl, P. (2001): Supply Chain Management: Strategy, Planning, and Operation. Prentice-Hall, Upper Saddle River.

[6] Shapiro, J., F. (2001): Modeling the Supply Chain. Duxbury, Pacific Grove.

[7] Simchi-Levi, D., Kaminsky, P., Simchi-Levi, E. (1999): Designing and Managing the Supply Chain: Concepts, Strategies and Case studies. Irwin/ Mc Graw-Hill.

[8] Tayur, S., Ganeshan, R., Magazine, M. (1999): Quantitative models for supply chain management, Kluwer, Boston.

INVESTICE DO OBNOVITELNÝCH ZDROJŮ ENERGIE

JANA KALČEVOVÁ[†]**, MARTINA KUNCOVÁ**[‡]

Abstrakt

Tento článek popisuje problematiku hodnocení investic do pěti obnovitelných zdrojů energie (OZE) v České republice s ohledem na 16 kritérií. Tato kritéria jsou podle obsahu rozdělena do pěti hlavních skupin dle klasifikace TESES (technická, ekonomická, sociální, ekologická a strategická). Vzhledem ke struktuře problému je k hodnocení OZE použita metoda AHP a získané výsledky jsou porovnávány s výsledky alternativních metod, jako je WSA, ELECTRE, PROMETHEE a TOPSIS.

Klíčová slova (keywords)

Analytický hierarchický proces, obnovitelné zdroje energie, vícekriteriální rozhodování.

ÚVOD

Velká část studií z poslední doby popisuje rostoucí životní úroveň ve většině zemí světa (Chatzimourattidis and Pilavachi, 2008). Nutným důsledkem této zvyšující se úrovně je pak nárůst spotřeby používané energie. Poptávka po energii bývala v minulé době plně uspokojována ze zdrojů fosilních paliv, jako je např. uhlí nebo ropa, ale rostoucí spotřeba způsobuje dramatický pokles zásob těchto paliv (Pilavachi *et al.*, 2009). Navíc není možné přehlížet ani jejich vliv na životní prostředí. Toto jsou jen některé důvody pro rozšíření využívání

† Mgr. Jana Kalčevová, Ph.D., Vysoká škola ekonomická v Praze, Nám. W. Churchilla 4, Praha 3, 130 67, tel. 224 095 449, email: kalcevov@vse.cz

‡ Ing. Martina Kuncová, Ph.D., Vysoká škola ekonomická v Praze, Nám. W. Churchilla 4, Praha 3, 130 67, tel. 224 095 449, email: kuncovam@vse.cz

mnohem ekologičtějších alternativních zdrojů energie a provádění příslušných analýz pro volbu investic do těchto zdrojů.

Česká republika po svém vstupu do Evropské Unie (EU) přebrala mimo jiné i závazky související se snižováním emisí a podporou OZE. Požadavky EU jsou pro tento případ konkretizovány ve Směrnici Evropského parlamentu a Rady 2009/28/ES. V ní EU stanovuje jako povinný cíl 20% podíl energie z OZE v celé EU do roku 2020. Pro Českou republiku z toho vyplývá závazek zvýšit podíl energie z obnovitelných zdrojů na 13%. Česká republika v návaznosti na tento předpis vypracovala cíle pro rok 2030 15% a v roce 2050 dokonce 30% podíl energie z OZE.

V tomto článku analyzujeme investice do pěti zdrojů OZE na území ČR. Prvním jsou větrné elektrárny (Voivontas *et al.*, 1998), druhou možností jsou dnes velmi rozšířené fotovoltaické elektrárny (Shawal and Taib, 2003) založené na získávání energie ze slunečního záření. Geotermální elektrárna (Lund, 1999), zpracovávající tepelnou energii Země, je v našich zemích jevem téměř nevídaným, přestože máme pro jejich budování vcelku příznivé podmínky. Vodní plochy a rychlé řeky jsou vhodným místem pro budování malých i velkých vodních elektráren (VanCamp, J. and Bevington, D., 1996). Poslední možností je získávání energie z biomasy (Tillman, *et al.*, 1999). Pochopitelně existují I další OZE, např. Energie mořských vln, ale ty jsou v podmínkách ČR nedostupné. Je zřejmé, že každý z uvedených zdrojů energie má své výhody a nevýhody

Pro hodnocení uvedených variant bylo použito 16 kritérií rozdělených do pěti hlavních skupin s ohledem na TESES (technická, ekonomická, sociální, ekologická a strategická) klasifikaci. Technická kritéria hodnotí OZE podle základních požadavků na jejich technické možnosti a proveditelnost, ekonomická kritéria hodnotí OZE podle jejich ziskovosti a sociální podle společenských zájmů. Ekologická kritéria se zaměřují na OZE z pohledu vlivu na životní prostředí a strategická kritéria posuzují dlouhodobý vliv na sociální okolí.

V tomto článku tedy hodnotíme uvedené zdroje z pohledu vícekriteriální analýzy a jedná se o komplexní problém s malých počtem variant (5 alternativ) a velkým počtem kritérií (16 v tomto případě).

1 METODOLOGIE

V tomto článku tedy hodnotíme pět variant investic do OZE s ohledem na pět hlavních skupin kritérií. Pro hodnocení jsme použili metodu AHP (Analytic Hierarchy Process) a výsledky porovnali s jinými metodami.

Poznamenejme, že toto není první článek používající metodu AHP k hodnocení OZE. V minulosti byl tento postup použit hned několikrát (Pilavachi *et al.*, 2009), (Chatzimouratidis and Pilavachi, 2007), (Chatzimouratidis and Pilavachi, 2008), (Winebrake and Creswick, 2003), nebo třeba (Papalexandrou *et al.*, 2008)a (Lee *et al.*, 2008). Jak jsme již zmínili, AHP není jedinou metodou používanou pro vícekriterální hodnocení a v tomto článku byly zdroje energie hodnoceny také např. metodami ELECTRE (the Elimination and Choice Expressing Reality method) a PROMETHEE (the Preference Ranking Organisation Method for Enrichment Evaluations). I tyto metody byly již užity dříve, například ve studiích (Vego *et al.*, 2008), (Beynon and Wells, 2008) a (Li and Sun, 2009).

1.1 VARIANTY

Seznam variant pro hodnocení investic do OZE je dán zdroji, které mohou být vybudovány na území ČR. Data pro analýzu odpovídají reálným projektům a pochází z práce (Petríková, 2010). Zde uvádíme jen základní charakteristiky pro snadnější představu.

- **Větrná elektrárna** – větrná farma se čtyřmi stanicemi, očekávaný výkon 2300kW, životnost 20 let, investiční náklady přibližně 367 milionů Kč.
- **Fotovoltaická elektrárna** – očekávaný výkon 373kW, životnost 15 let, investiční náklady přibližně 30 milionů Kč.

- **Geotermální elektrárna** – očekávaný výkon 300kW, životnost 30 let, investiční náklady přibližně 23 milionů Kč.
- **Hydro-elektrická elektrárna** – očekávaný výkon 103kW, životnost 20 let, investiční náklady přibližně 10 milionů Kč.
- **Elektrárna na biomasu** – očekávaný výkon 1500kW, životnost 20 let, investiční náklady přibližně 170 milionů Kč.

1.2 KRITÉRIA

Jak jsme již zmínili v úvodu, kritéria byla rozdělena do pěti hlavních skupin podle klasifikace TESES. Každá ze skupin pak obsahovala několik kritérií.

- **Technická kritéria**
  - *T1:* koeficient ročního využití instalovaného výkonu (maximalizační) – poměr skutečně vyprodukované energie k teoreticky možné roční produkci,
  - *T2:* předpokládaná ztráta produkce (minimalizační) – ztráta energie způsobená vlivem nestálosti počasí, výkyvy v produkci vlivem poruch zařízení, servisem a opravami,
  - *T3:* očekávaná životnost zařízení (maximalizační) – jak dlouho bude elektrárna v provozu,
  - *T4:* investiční náklady projektu (minimalizační) – finanční nároky na výstavbu, složitost realizace, dobu realizace a technickou náročnost.
- **Ekonomická kritéria**
  - *F1:* čistá současná hodnota – NPV (maximalizační),

- *F2:* vnitřní výnosové procento – IRR (maximalizační),
- *F3:* prostá doba návratnosti (minimalizační),
- *F4:* návratnost investice – ROI (maximalizační),
- *F5:* čistý zisk (maximalizační).

▪ **Sociální kritéria**

- *S1:* nové pracovní příležitosti (maximalizační),
- *S2:* uživatelský komfort (maximalizační) – náročnost zařízení na obsluhu, vlastní servis, kvalitu a komplexnost dodávaných služeb.

▪ **Ekologická kritéria**

- *E1:* snížení emisí CO_2 (maximalizační) – úspora emisí ve srovnání s černým uhlím,
- *E2:* zásah do vzhledu krajiny (minimalizační),
- *E3:* další dopady na životní prostředí (minimalizační) – takové jako hluk, prašnost, rušení a odpuzování zvěře, pach, zábory zemědělské půdy apod.

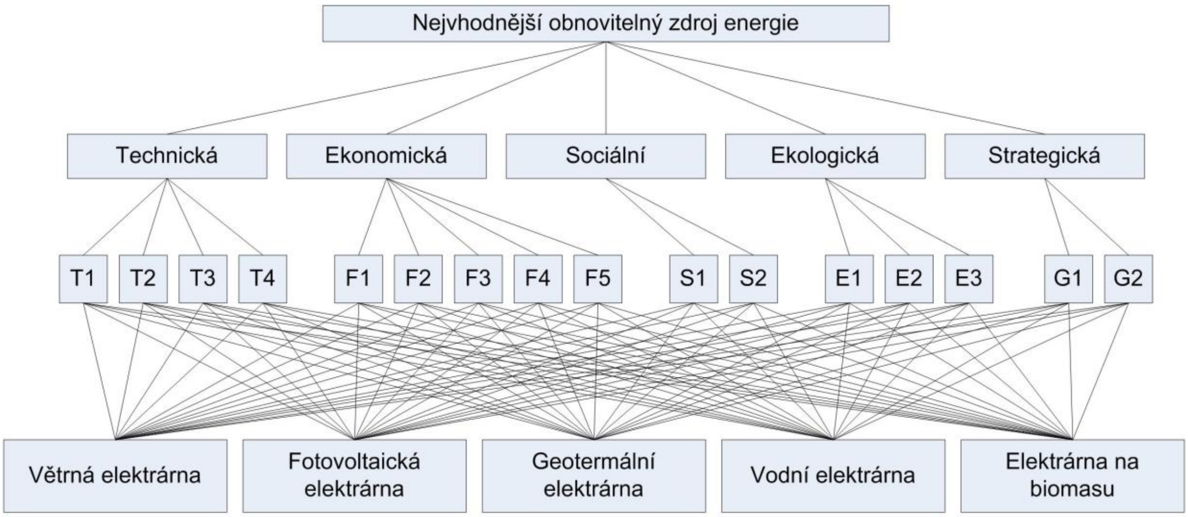
▪ **Strategická kritéria**

- *G1:* dostupnost vhodných ploch (maximalizační) – adekvátnost přírodních podmínek a dostupnost vhodných volných ploch k výstavbě,
- *G2:* míra diverzifikace zdrojů (maximalizační) – zvýšení rozsahu portfolia energetických zdrojů.

Úplná data pro tuto vícekriteriální analýzu jsou vložena v příloze A.

1.3 METODY

Pro vícekriteriální hodnocení variant bylo použito několik odlišných přístupů. Jedním z nejvhodnějších přístupů k hodnocení problémů této struktury patří metoda AHP (Analytic hierarchy process), jehož struktura rozděluje problém na několik vzájemně propojených úrovní. V tomto článku užíváme čtyřúrovňovou hierarchii s následujícími úrovněmi: cíl hodnocení, hlavní skupiny kritérií, dílčí kritéria a varianty na nejnižší úrovni (viz Obr. 1).



Obr. 1 Struktura AHP (zdroj: vlastní)

Poznamenejme, že výsledky analýz silně závisí na preferencích rozhodovatele, tzn. na použitých vahách pro kritéria. To je důvodem, proč jsou analýzy dělány z několika úhlů pohledu (dodat referenci na článek Jablonský, Kalčevová ze Smolenice). V našem případě byl uvažován pohled ekonomický a pohled ekologický.

Metoda AHP (autorem Tomas Saaty, 1970) je běžně užívanou metodou VHV a užívá stromovou strukturu, podobnou jako na obrázku 1, k redukci složitého problému na jednodušší podproblémy, které mohou být snadněji řešeny. Popis postupu řešení klasického tříúrovňového AHP popisuje např. (Liberatore and Nydick, 2003). Po vytvoření stromové struktury jsou hodnoceny jednotlivé varianty s ohledem na každé jedno kritérium metodou kvantitativního párového srovnávání. V dalším kroku jsou pak obdobným přístupem hodnocena kritéria mezi sebou. Tímto postupem obdržíme matici hodnocení pro varianty a vektor vah pro kritéria. Na závěr je počítán očekávaný užitek metodou váženého součtu. Varianta s nejvyšším užitkem je považována za vítěze.

V tomto článku používáme čtyřúrovňové AHP, a postup tedy zahrnuje jeden krok navíc. Tím krokem je výpočet dalších pěti váhových matic pro hodnocení jednotlivých kritérií v rámci dané skupiny. Zbylý postup je pak analogický.

Metoda AHP (Podvezko, 2009) není jedinou metodou pro VHV. V následující kapitole jsou porovnány výsledky získané metodou AHP s těmi, které jsme obdrželi dalšími metodami, jako WSA (Weighted Sum Approach), TOPSIS (Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution), ELECTRE (ELimination Et Choix Traduisant la REalité) a PROMETHEE (Preference Ranking Organization METHod for Enrichment Evaluations).

Metoda WSA (Marler and Arora, 2010) řadí varianty na základě jejich užitku, narozdíl od metody TOPSIS (Secme, *et al.*, 2009), která řadí varianty podle vzdálenosti od ideálu. Pro obě metody je nutná pouze znalost váhového vektoru.

Metoda ELECTRE I (Bricki, *et al.*, 1998) rozhoduje, zda je každá jedna varianta variantou efektivní či nikoliv na základě preferenčního uspořádání. Uživatel při použití této metody zadává na vstupu váhy kritérií, práh preference a práh dispreference. Pro prezentované analýzy byl použit práh preference 0.8 a dispreference 1.

Metody třídy PROMETHEE (Elevli and Dmirci, 2004) užívají k vyjádření intenzity preference tzv. Preferenční funkce. Uživatel může volit mezi šesti typy těchto funkcí. Pro uvedené analýzy byla použita metoda PROMETHEE II. a vybrána byla Gaussovská preferenční funkce pro kritéria T1, T2, F1, F2, F4, F5, and E1. Pro ostatní kritéria byla užita obecná preferenční funkce.

Poznamenejme, že analýzy byly provedeny za použití softwaru IZAR (Kalcevova and Fiala, 2006), který má implementovány všechny uvedené metody.

2 VÝSLEDKY

Hlavní skupiny kritérií stejně jako dílčí kritéria byla ohodnocena Saatyho vahami. (pro dílčí výsledky viz přílohu B, pro konečné váhy Tabulku 1).

Tabulka 1 Saatyho váhy pro AHP (zdroj: vlastní výpočty)

Skupina kritérií	Kritérium	Výsledné váhy
Technická	T1	0,150
	T2	0,058
	T3	0,023
	T4	0,043
Ekonomická	F1	0,152
	F2	0,132
	F3	0,058
	F4	0,087
	F5	0,100
Sociální	S1	0,014
	S2	0,068
Ekologická	E1	0,012
	E2	0,036
	E3	0,036
Strategická	G1	0,027
	G2	0,004

Hodnocení OZE s ohledem na představených 16 kritérií je v tabulce 2. Zde můžeme vidět také hodnocení podle ostatních metod.

Z tabulky je zřejmé, že s ohledem na všechny metody je nejlepším OZE v podmínkách ČR geotermální elektrárna. Ta je jednou ze dvou efektivních variant dle metody ELECTRE. Druhou je pak elektrárna na biomasu. Rozdíl mezi geotermální elektrárnou a elektrárnou na biomasu je však dle ostatních metod značný. Třetí místo pak zaujímají větrné elektrárny.

Čtvrté a páté místo je závislé na použitých metodách. AHP, TOPSIS a PROMETHEE II. Hodnotí lépe fotovoltaickou elektrárnu, zatímco WSA preferuje hydro.elektrickou. Tento fakt je dán užitím lineární metriky v případě metody WSA, zatímco TOPSIS a PROMETHEE užívají obecně nelineární metriky, a výsledky se tak liší.

Tabulka 2 Hodnocení OZE (zdroj: vlastní výpočty)

elektrárny \ metody	Větrná	Fotovoltaická	Geotermální	Hydro-elektrická	Na biomasu
AHP	0,206	0,124	0,330	0,094	0,246
WSA	0,428	0,221	0,691	0,253	0,551
TOPSIS	0,447	0,223	0,552	0,200	0,546
ELECTRE I.	neefektivní	neefektivní	efektivní	neefektivní	efektivní
PROMETHEE II.	-0,049	-0,244	0,363	-0,245	0,175

3 ZÁVĚR

Integrace do obnovitelných zdrojů energie může být klíčovým prvkem nové energetické politiky, neboť zvyšuje stabilitu a obnovitelnost energetického systému, minimalizuje ekologické dopady a významně uchovává zdroje fosilních paliv.

Umístění geotermální elektrárny na prvním místě není nijak překvapivé. Má maximální očekávanou životnost a také minimální návratnost. Také návratnost investice a vnitřní výnosové procento je maximální. Další výhodou je minimální ztrátovost I fakt, že obě sociální kritéria jsou dobře hodnocena. Důležitý je také dopad na prostředí, který je nejnižší ze všech uvažovaných variant, neboť geotermální elektrárny jsou budovány pod zemským povrchem. Tato elektrárna navíc rozšiřuje energetický mix ČR.

Problémem geotermálních elektráren je však jejich instalace (kritérium G1). V ČR je totiž opravdu málo vhodných a dostupných míst pro instalace tohoto typu elektráren. A tak ač je geotermální elektrárna jednoznačně nejlepším zdrojem investice do OZE v ČR, patrně ani v budoucnu jich na našem území příliš neuvidíme.

Tento článek vznikl za podpory grantu IGA VŠE F4/14/2010.

LITERATURA

Beynon, M.J. and Wells, P. (2008). The lean improvement of the chemical emissions of motor vehicles based on preference ranking: a PROMETHEE uncertainty analysis. *Omega*, 36 (3), p. 384-394.

Bricki, H.D., Mendas, A. and Trache, M.A. (1998). The use of combined ELECTRE multicriteria methods and raster GIS for the spatial decision support. *27th international symposium on remote sensing of environment, proceedings – information for sustainability,* p. 513-516.

Chatzimouratidis, A.I. and Pilavachi, P.A. (2007). Objective and subjective evaluation of power plants and their non-radioactive emissions using analytic hierarchy process. *Energy Policy*, 35 (8), p. 4027-4037.

Chatzimouratidis, A.I. and Pilavachi, P.A. (2008). Multicriteria evaluation of power plants impact on the living standard using the analytic hierarchy process. *Energy Policy,* 36 (3), p. 1074-1089.

Elevli, B. and Dmirci, A. (2004). Multicriteria choice of ore transport system for an underground mine: application of PROMETHEE methods. *Journal of the South African Institute of Mining and Metallurgy*, 104 (5), p. 251-256.

Kalcevova, J. and Fiala, P. (2006). IZAR – multicriteria decision support system. *Proceedings of the 24th International Conference on Mathematical Methods in Economics* 2006, p. 277-282.

Lee, S.K., Mogi, G. and Kim, J.W. (2008). The competitiveness of Korea as a developer of hydrogen energy technology: the AHP approach. *Energy Policy,* 36 (4), p. 1284-1291.

Li, H. and Sun, J. (2009). Hybridizing principles of the Electre method with case-based reasoning for data mining: Electre-CBR-I and Electre-CBR-II. *European Journal of Operational Research*, 197 (1), p. 214-224.

Lund, J.W. and Boyd, T. (1999). Small geothermal Power – Project examples. *GHC Bulletin*, Geo-Heat Center.

Marler, R.T. and Arora, J.S. (2010). The weighted sum method for multi-objective optimization: new insights. *Structural and multidisciplinary optimization*, 41 (6), p. 853-862.

Papalexandrou, M.A., Pilavachi, P.A. and Chatzimouratidis, A.I. (2008). Evaluation of liquid biofuels using the analytic hierarchy process, Process. *Safety and Environmental Protection*, 86, p. 360-374.

Petríková, T. (2010). Analýza investic do energetických zdrojů (Investment Analysis in Energy Sources). *Diplomová práce (Diploma Theses)*, Vysoká škola ekonomická v Praze (University of Economics Prague).

Pilavachi, P.A., Chatzipanagi, A.I. and Spyropoulou, A.I. (2009). Evaluation of hydrogen production methods using the Analytic Hierarchy Process. *International Journal of Hydrogen Energy*, no. 34, p. 5294-5303.

Podvezko, V. (2009). Application of AHP technique. *Journal of business economics and management,* 10 (2), p. 181-189.

Secme, N.Y., Bayrakdaroglu, A. and Kahraman, C. (2009). Fuzzy performance evaluation in Turkish Banking Sector using Analytic Hierarchy Process and TOPSIS. *Expert systems with applications*, 36 (9), p. 11699-11709.

Shawal, M. and Taib, S. (2003). Development of expert system as an evaluation tool for photovoltaic power supply. *National Power Engineering Conference Pecon 2003*, Proceedings, p. 292-295.

Tillman, D.A., Plasynski, S. and Hughes, E. (1999). Biomass cofiring in coal-fired boilers: Test programs and results. *Biomass: a Growth Opportunity in Green Energy and Value-added Products*, 1-2, p. 1287-1291.

evropský sociální fond v ČR EVROPSKÁ UNIE MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost Vysoká škola polytechnická Jihlava

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VanCamp, J. and Bevington, D. (1996). Hydrogen and the northern Canadian energy system. *Hydrogen Energy Process XI*, 1-3, p. 379-384.

Vego, G., Kučar-Dragičevic, S. and Koprivana, N. (2008). Application of multi-criteria decision-making on strategic municipal solid waste management in Dalmatia. *Croatia Waste Management*, 28 (11), p. 2192-2201.

Voivontas, D., Assimacopoulos, D. and Mourelatos, A. (1998). Evaluation of renewable energy potential using GIS decision support system. *Renewable Energy*, 13 (3), p. 333-344.

Winebrake, J.J. and Creswick, B.P. (2003). The future of hydrogen fuelling systems for transportation: an application of perspective-based scenario analysis using the analytic hierarchy process. *Technology Forecasting and Social Change*, 70 (4), p. 359-384.

evropský sociální fond v ČR EVROPSKÁ UNIE MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost Vysoká škola polytechnická Jihlava

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příloha A. Data pro vícekriteriální analýzu

kritérium	jednotky	Typ kritéria	Větrná	Fotovoltaická	Geotermální	Hydro-elektrická	Na biomasu
T1	%	max	1,009	0,093	0,799	0,593	0,856
T2	%	min	0,080	0,097	0,040	0,178	0,144
T3	point	max	20	15	30	20	20
T4	point	min	75	40	95	80	60
F1	mil. CZK	max	119,6	1,0	94,7	7,0	366,9
F2	%	max	0,115	0,080	0,407	0,157	0,307
F3	year	min	8,5	8,5	2,5	6,5	3,5
F4	%	max	2,034	1,529	11,090	2,158	0,671
F5	mil. CZK	max	386,5	28,4	103,7	11,408	86,8
S1	point	max	65	40	75	70	55
S2	point	max	70	80	75	75	55
E1	Kg/kWh	max	2,917	0,268	2,310	1,715	2,475
E2	point	min	80	75	50	60	60
E3	point	min	40	25	10	50	40
G1	point	max	40	85	25	40	75
G2	point	max	65	70	90	45	60

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Vysoká škola polytechnická Jihlava
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příloha B. Dílčí váhy kritérií

Skupina kritérií	Váha skupiny	Kritérium	Váha uvnitř skupiny
Technická	0,274	T1	0,548
		T2	0,212
		T3	0,083
		T4	0,157
Ekonomická	0,530	F1	0,287
		F2	0,250
		F3	0,109
		F4	0,165
		F5	0,189
Sociální	0,081	S1	0,167
		S2	0,833
Ekologická	0,084	E1	0,142
		E2	0,429
		E3	0,429
Strategická	0,031	G1	0,857
		G2	0,143

VÍCEKRITERIÁLNÍ HODNOCENÍ AKCIOVÝCH TITULŮ OBCHODOVANÝCH V SYSTÉMU SPAD NA BCPP

ADAM BOROVIČKA[§]

Abstrakt

Problematika hodnocení akciových titulů patří do kategorie reálných problémů, kde lze uplatnit matematické metody, konkrétně metody vícekriteriálního hodnocení variant. Meritem příspěvku je reálná situace investičního rozhodování potenciálního investora, který se rozhodl vložit své volné finanční prostředky do některé z akcií ve zmíněném burzovním teritoriu (na Burze cenných papírů Praha v prostředí nejlikvidnějšího tržního segmentu SPAD - Systém pro podporu trhu akcií a dluhopisů) v České republice. Aplikací vybraných hodnotících kritérií a metod lze získat doporučení pro chování daného investora. Článek tedy ve zkratce nastiňuje uvedený problém a jeho řešení.

Klíčová slova (keywords)

Akcie, investice, kritérium, rozhodnutí

ÚVOD

Rozhodování, rozhodnutí, rozhodnout se – pojmy, které doprovázejí na cestě životem každého z nás. Obecně jedinec volí vždy takovou alternativu, která mu poskytuje největší užitek. V mnoha případech se jedná o velice složité a komplexní problémy, které jsou

---

[§] Ing. Adam Borovička, Katedra ekonometrie, Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky, nám. W. Churchilla 4, Praha 3, 130 67, tel.: +420605710878, adam.borovicka@vse.cz

bez použití vhodných modelů jakožto prostředníků mezi teorií a realitou složitě řešitelné. V obdobné situaci stojí i investoři, kteří se rozhodují, do jakých akciových titulů na burze budou investovat.

Pro bližší pochopení a identifikaci s problémem je žádoucí seznámení s českým burzovním prostorem, zejména pak se Systémem pro podporu trhu akcií a dluhopisů na Burze cenných papírů Praha. Další teoretická pasáž bude zahrnovat osvětlení základních pojmů na poli rozhodovacím a rámcovou klasifikaci metodických přístupů. V aplikačně zaměřené části definujeme typy investorů různého zaměření při investování, určíme tedy kriteriální systémy, aplikujeme vybrané metody rozhodovacích procesů. Následná studie výsledků vyústí přijetím patřičných závěrů spojených s investičním doporučením.

1 BURZA CENNÝCH PAPÍRŮ PRAHA

Burzovní prostředí se na území českého státu plně začíná obnovovat a vlastně nově inovativně tvořit po dlouhém období komunistického režimu, pro nějž byl obchod s cennými papíry jedním z atributů „nenáviděného“ kapitalismu. Zahájení obchodování na parketu burzy se datuje k 6. dubnu 1993. Burza cenných papírů Praha je akciová společnost. Přístup do burzovního obchodního systému mají pouze licencovaní obchodníci, kteří jsou členy burzy, tudíž BCPP je založena na členském principu. BCPP je burzou elektronickou, kde funguje automatizovaný obchodní systém, který je založen na automatickém zpracování objednávek, kdy jednotliví členové burzy jsou on-line připojeni na centrální počítač a vydávají jednotlivé nákupní a prodejní příkazy. Můžeme rozlišit několik druhů obchodů, nás však budou zajímat hlavně obchody s účastí tvůrců trhu v **Systému pro podpodru trhu akcií a dluhopisů** (více viz Veselá, 2005). V současnosti je v tomto systému obchodováno 15 akciových emisí – AAA AUTO PRAHA, CETV, ČEZ, ECM, ERSTE GROUP BANK, FORTUNA, KITD, KOMERČNÍ BANKA, NWR, ORCO, PEGAS NONWOVENS, PHILIP MORRIS ČR, TELEFÓNICA O2 C.R., UNIPETROL, VIG. V době prováděné analýzy ještě nebyla na trhu emise společnosti KIT Digital, která byla upsána na konci ledna tohoto roku. V říjnu roku 2010 přibyl na burzu patnáctý akciový titul, zástupce zcela nového odvětví na pražské burze v podobě provozování kurzového sázení společností Fortuna. Oficiálním indexem burzy cenných papírů je akciový index PX.

2 TEORIE ROZHODOVÁNÍ

Rozhodování lze charakterizovat jako výběr jedné nebo více variant z množiny potenciálně realizovatelných variant (Fiala a kol., 1994; Fiala, 2008). Rozhodovací proces by se zcela určitě neobešel bez pravidla, podle kterého jsou jednotlivé varianty porovnávány. Zmíněné pravidlo se nazývá **kritérium**, pomocí něhož uživatel dává najevo svoje preference na množině variant (Fiala, 2008). Množina variant může vykazovat spojitý nebo diskrétní charakter (více viz Fiala, 2008 nebo Fiala a kol, 1994). V případě investičního rozhodování má potenciální investor k dispozici množinu variant s konečným počtem prvků – akciových titulů. V této souvislosti hovoříme o **vícekriteriálním hodnocení variant**. Jak předešlé vyjádření napovídá, praktické problémy většinou zahrnují nejedno kritérium různé povahy (více viz Brožová a kol., 2009). Nejinak je tomu i v našem sledovaném případě.

2.1 VÍCEKRITERIÁLNÍ HODNOCENÍ VARIANT

Úloha vícekriteriálního hodnocení variant je zadána explicitně seznamem variant $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$ a seznamem kritérií $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$. Hodnocení variant podle jednotlivých kritérií je zvykem zobrazovat ve formě tzv. kriteriální matice

$$f_1 \quad f_2 \quad \ldots \quad f_k$$

$$
\begin{array}{c}
a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_p
\end{array}
\begin{pmatrix}
y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1k} \\
y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2k} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
y_{p1} & y_{p2} & \dots & y_{pk}
\end{pmatrix},
$$

kde prvky y_{ij} *(i=1, 2, …, p, j=1, 2, …, k)* představují informace o hodnocení variant podle jednotlivých kritérií (Fiala, 2008).

V úlohách vícekriteriálního rozhodování charakterizujeme přístupy k vyjádření preferencí rozhodovatele, ať už mezi kritérii, tak mezi variantami podle jednotlivých kritérií (více viz Fiala; 2008 či Brožová a kol., 2009). Pro mou analýzu využívám k vyjádření preference kardinální informaci, formu vah. Pro bližší seznámení s metodami stanovení vah kritrérií doporučuji literaturu (Fiala, 2008; Brožová a kol., 2009 či Hwang a kol., 1981).

2.2 METODY VÍCEKRITERIÁLNÍHO HODNOCENÍ VARIANT

K základní klasifikaci metod vícekriteriálního hodnocení variant přistupuje (Fiala, 2008) z hlediska přítomnosti v rozhodovacím procesu dodatečných informací o kritériích. Rozlišujeme metody bez informace, metody s aspiračními úrovněmi, metody s ordinální a kardinální informací. Z hlediska prováděné analýzy nás bude nejvíce zajímat skupina metod s kardinální informací o kritériích. Metodické přístupy spadající do této skupiny se většinou klasifikují podle způsobu, který používají na vyhodnocování variant. Rozlišujeme tři přístupy – maximalizace užitku, minimalizace vzdálenosti od ideální varianty a preferenční relace. Metody založené na výpočetním principu maximalizace užitku jsou například metoda váženého součtu (WSA) nebo metoda AHP. Princip minimalizace vzdálenosti od ideální varianty zastupuje metoda TOPSIS. Mezi nejznámější metody využívající vyhodnocování variant podle preferenčí relace patří AGREPREF, MAPPAC a skupiny metod ELECTRE či PROMETHEE. O výše zmíněných metodách můžeme nastudovat více informací v literatuře (Fiala, 2008) nebo (Brožová a kol., 2009). Pro úplnost doplnění ještě jedné metody, která byla využita při investičním rozhodování, a to metoda přiřazovací, která vychází jak z ordinální informace v podobě uspořádání variant podle jednotlivých kritérií, tak je možné využít i kardinální informaci v podobě vah použitých charakteristik. Pro podrobnější informace bych doporučil vzít do rukou knihu (Hwang a kol., 1981), popř. (Bouška a kol., 1984).

3 KRITERIÁLNÍ SYSTÉM

Velice důležitou otázkou zůstává, podle jakých kritérií bude investor hodnotit jednotlivé investiční alternativy. Poté nastává řešení důležité záležitosti týkající se stanovení vhodné váhy vybraným kritériím při investičním rozhodování.

3.1 ZVOLENÁ KRITÉRIA

Pro účely analýzy byla vybrána následující kritéria:

- **výkonnost** akciového titulu - výnos vyjádřený v procentech z investované částky
    - ***krátkodobější (roční)*** - sleduje období roku 2008
    - ***dlouhodobější (čtyřletá)*** - zahrnuje vrcholnou fázi konjunktury, následnou krizi a začínající mírný vzestup
- **dividenda** - nominální hodnota dividendy pro rok 2008
- **dividendový výnos** - poměr dividendy a tržní ceny akcie
- **průměrný růst dividend** - pro období 2006 až 2008
- **volatilita cen** - měřena na základě měsíční směrodatné odchylky za období posledních tří let
- **průměrný objem obchodů** - hodnota je stanovena na základě pozorování denních objemů obchodů za období posledních tří let

- **tržní kapitalizace** - součin tržní ceny a počtu emitovaných akcií
- **zisk** (na akcii) - za první tři čtvrtletí krizového roku 2009
- **průměrná změna zisku** (na akcii) - za období 2007 až 2009 (říjen)
- **minimální investovaná částka** - cena standardizované obchodní jendotky obsahující určitý počet akcií konkrétního emitenta

Většina kritérií vykazuje maximalizační povahu, akorát charakteristika minimální investovaná částka a volatilita tržních cen akcií má minimalizační charakter. Několik dalších podnětných informací získáte v (Borovička, 2010).

Následující dvě tabulky zobrazují všechny hodnoty u jednotlivých variant podle konkrétních kritérií.

Tab. 1: Kriteriální matice (1. část)[**]

	Výkonnost 1R (%)	Výkonnost 4R (%)	Dividenda (Kč)	Pr. růst dividendy (%)	D/P	Volatilita (%)
AAA Auto	57.03	-74.84	0	0	0	23.64
CETV	19.82	-67.36	0	0	0	32.91
ČEZ	9.36	18.27	50	62.5	5.45	8.97
ECM	23.46	-78.64	0	0	0	19.71
ERSTE	84.53	-46.30	17.1	1.22	2.32	22.25
KB	28.78	2.65	180	10	4.78	12.48
NWR	130.61	-58.52	12.11	0	6.57	30.23
Orco	-14.87	-91.14	36.84	19.98	20.58	22.34
PEGAS	75,25	-44.01	23.68	8.85	5.39	11.05
PM	48.16	-51.84	560	5.29	6.21	12.02
TELEFÓNICA	-3.31	-20.98	50	0	11.57	6.34
UNIPETROL	-4.88	-41.11	17.65	0	12.19	11.48
VIG	51.03	-31.29	52.63	57.97	5.44	15.45
Povaha kritéria	**MAX**	**MAX**	**MAX**	**MAX**	**MAX**	**MIN**

Tab. 2: Kriteriální matice (2. část)

	Pr. objem obchodů (Kč)	Tržní kapitalizace (Kč)	Zisk na akcii (Kč)	Pr. změna zisku na akcii (%)	Min. in. Částka (Kč)
AAA Auto	1 752 194	938 446 569	0.62	-5	41 550
CETV	81 455 406	26 151 145 722	-14.93	-270.5	466 600
ČEZ	1 230 244 744	493 605 603 883	82	13	4 587 500
ECM	27 956 211	2 157 954 506	-107.59	-243.5	157 100
ERSTE	305 035 854	278 001 693 262	51.58	-47	1 471 200
KB	394 484 053	143 069 082 928	296	0.5	1 882 000
NWR	150 882 010	48 734 540 537	-6.84	-27	921 850
Orco	60 613 199	1 958 952 014	-623.71	-750.5	89 500
PEGAS	27 804 950	4 054 475 420	60.49	-21.5	439 300
PM	22 728 947	17 244 332 678	413	33.5	901 100
TELEFÓNICA	315 777 581	139 175 041 469	18	6.5	2 160 500
UNIPETROL	99 378 939	26 264 527 218	-3.22	-120.5	1 448 400
VIG	5 442 178	123 840 000 000	72.1	-3	483 750
Povaha kritéria	**MAX**	**MAX**	**MAX**	**MAX**	**MIN**

[**] Zdroji dat v obou částech byly výroční zprávy emitujících firem, internetové stránky BCPP či finanční společnosti Patria. Mnohé údaje musely být dotvořeny výpočtem.

3.2 STANOVENÍ VAH KRITÉRIÍ

Investor podává informaci o kritériích kardinálního charakteru. Stanovuje váhy kritérií na základě bodovací metody (Fiala, 2008). Uživatel má k dispozici škálu od nuly do desítky, z které přiřazuje body podle subjektivní důležitosti jednotlivým charakteristikám.

Pro větší atraktivitu zvolíme dva typy investorů, kteří představují typické investiční strategie. První typ investujícího subjektu popíšeme jako investora, kterému tolik nezáleží na kapitálovém výnosu, jednoznačně se zaměřuje na ***dividendový výnos***. Samozřejmě též sleduje výkonnost akcie za uplynulá léta, či jak si stojí firma ve výsledku hospodaření, ale jsou to čistě doprovodné a spíše okrajové ukazatele. Na druhém břehu řeky stojí investující osoba, která bedlivě sleduje ***kapitálový výnos*** z akcie, volatilitu cen (kapitálové riziko), také se zajímá o prosperitu firmy, naopak přítomnost dividendy prakticky nevnímá. Tento investor velice silně vnímá kapitálový výnos, na druhé straně krotí své výnosové ambice uvědomělých přístupem k riziku, investice volí spíše stabilnějšího charakteru na delší časový horizont.

4 INVESTIČNÍ ROZHODNUTÍ

Jak již bylo zmíněno, k analýze investiční situace využijeme metody s kardinální informací o zvolených kritériích. Postupně byly využity následující metody: přiřazovací metoda, metoda WSA, TOPSIS, ELECTRE I a III, PROMETHEE II a MAPPAC (detailní informace o výsledcích výpočtů – viz Borovička, 2010). Nastíníme si tedy jen stručně výsledné pořadí. Asi nejjednodušší mechanismus výpočtu finálního uspořádání investičních variant spočívá ve zprůměrování všech nabytých pořadí u každé varianty za předpokladu, že výsedky použitých metod budou mít stejnou váhu.

Tab. 3: Výsledné pořadí investičních alternativ pro oba investory

	Investor orientující se na dividendový výnos		*Investor orientující se na kapitálový výnos*	
Výs. pořadí	Společnost	Průměrné pořadí	Společnost	Průměrné pořadí
1.	**ČEZ**	2.08	**ČEZ**	1.50
2.	**PM**	2.25	**KB**	2.00
3.	**KB**	2.83	**ERSTE**	4.25
4.	**VIG**	4.17	**TELEFÓNICA**	4.33
5.	**TELEFÓNICA**	5.50	**VIG**	5.67
6.	**PEGAS**	5.83	**PM**	6.08
7.	**ORCO**	6.50	**NWR**	6.67
8.	**UNIPETROL**	8.17	**PEGAS**	7.17
9.	**ERSTE**	8.67	**UNIPETROL**	7.67
10.	**NWR**	9.00	**AAA Auto**	10.50
11.	**AAA Auto**	11.00	**CETV**	10.67
12.	**ECM**	12.00	**ECM**	11.50
13.	**CETV**	13.00	**ORCO**	13.00

Zdroj: diplomová práce (Borovička, 2010)

Pro investora zaměřeného na dividendový výnos se na prvním místě s mírným náskokem před tabákovou firmou Philip Morris umístila **akcie společnosti ČEZ**. Investor by tudíž na základě vícekriteriálního rozhodování investoval své peněžní prostředky právě do akcie této energetické společnosti. I díky velice malému rozdílu mezi prvními dvěma společnostmi by nebylo od věci využít základní nástroje fundamentální či technické analýzy, které by dále prověřily výhodnost investice do daného investičního instrumentu. Například stanovením vnitřní hodnoty akcie by se ukázala nadhodnocenost či podhodnocenost daného titulu na burze cenných papírů, což by bylo dalším příhodným vodítkem k uvažované investici.

Podle vícekriteriální rozhodovací úlohy investor orientující se na kapitálový výnos vkládá své finanční prostředky do **akcie společnosti ČEZ**, která vyhrála zcela drtivě. Ač jsou výsledky naprosto jednoznačné, další pohled na investiční rozhodnutí by také vnesla aplikace metod fundamentální či technické analýzy, které jsou hojně používaným konceptem po celém světě.

5 ZÁVĚR

Metody vícekriteriálního hodnocení variant patří mezi metody matematického modelování. V článku bylo nastíněno, jak lze některé z metod využít v praktické aplikaci, zde konkrétně při rozhodování investora.

LITERATURA

[1] Borovička, A.: Vícekriteriální hodnocení akciových titulů obchodovaných v systému SPAD na BCPP, diplomová práce, 2010

[2] Bouška, J., Černý, M., Glückaufová, D.: Interaktivní postupy rozhodování, Academica, 1984, ISBN (Brož.)

[3] Brožová, H., Houška, M., Šubrt, T.: Modely pro vícekriteriální

rozhodování, ČZU, Praha, 2009, ISBN 978-80-213-1019-3

[4] Fiala, P.: Modely a metody rozhodování, Oeconomica, Praha, 2008, ISBN 978-80-245-1345-4

[5] Fiala, P., Jablonský, J., Maňas, M.: Vícekriteriální rozhodování, VŠE, Praha, 1994, ISBN 80-7079-748-7

[6] Hwang, C. L., Yoon, K.: Multiple Attribute Decision Making. Methods and Applications, Springer-Verlag, Berlin, 1981, ISBN 3-540-10558-1

[7] Veselá, J.: Burzy a burzovní obchody – výchozí texty ke studiu, Oeconomica, Praha, 2005, ISBN 80-245-0939-3

KOMPARACE NABÍDKY CESTOVNÍHO POJIŠTĚNÍ ZA POUŽITÍ METOD VÍCEKRITERIÁLNÍHO ROZHODOVÁNÍ

LENKA LÍZALOVÁ, MARTINA KUNCOVÁ††

Abstrakt

Nabídka produktů cestovního pojištění je široká, webové stránky nabízí srovnání aktuální nabídky jednotlivých pojišťoven. Pokud se klient orientuje výhradně podle ceny, nebývá jeho volba optimální. Kritérií, která ovlivňují rozhodování je celá řada a právě proto bývá rozhodování tak obtížné. Vyhodnotit, která nabídka nejlépe splňuje požadavky klienta lze některou z metod vícekriteriálního rozhodování. Úkolem bude určit pořadí sledovaných produktů dle zvolených kritérií, při zadání vah (tedy důležitosti) těchto kritérií pro konkrétního klienta. Jako nejvhodnější byly zvoleny metody WSA, TOPSIS a ELECTRE III. Budou nastíněny principy těchto metod a varianta s nejvyšším užitkem pak bude vybrána jako varianta kompromisní.

Klíčová slova (keywords)

Cestovní pojištění, komparace produktů, metody vícekriteriálního rozhodování

ÚVOD

Stránky České asociace pojišťoven (www.cap.cz, 2010) zdůvodňují, proč je důležité se pojistit: „Náklady na léčbu v některých cizích zemích mnohonásobně převyšují náklady na léčbu v ČR. I když mají naši občané při pobytu ve státech Evropské unie nárok na zdravotní péči na účet svých zdravotních pojišťoven (Evropský zdravotní průkaz), v mnoha případech je vyžadována vysoká

---

†† **Ing. Lenka Lízalová, Ph.D., Vysoká škola polytechnická Jihlava, Tolstého 16, 58601 Jihlava**
Tel. +420 567141217, email: lizalova@vspj.cz
Ing. Martina Kuncová, Ph.D., Vysoká škola polytechnická Jihlava, Tolstého 16, 58601 Jihlava, Tel. +420 567141215, email: kuncova@vspj.cz

spoluúčast, kterou zdravotní pojišťovny nehradí. Z EZP také není kryta repatriace zpět do vlasti.“ Cestovní pojištění by tedy mělo být součástí každé zahraniční cesty, ať už soukromé, s cestovní kanceláří nebo pracovní. Cestovní pojištění, finančně chrání pojištěného v případech, že se v cizině dostane do potíží, kryje totiž rizika spojená s náhlým onemocněním, úrazem, ztrátou zavazadel, nebo způsobení škody třetí osobě.

1 POJISTNÁ RIZIKA

Podle přílohy č. 2, zákona o pojišťovnictví (viz business.center.cz, 2010), která se zabývá rozdělením pojistných odvětví pro výkaznictví pojišťoven, patří cestovní pojištění do části B odvětví neživotního pojištění, skupiny 18. Zákonný název cestovního pojištění je „Pojištění pomoci osobám v nouzi během cestování nebo pobytu mimo místa svého bydliště, včetně pojištění finančních ztrát bezprostředně souvisejících s cestováním (asistenční služby)“ (Zákon o pojišťovnictví, 1999).

Základním rizikem, které ošetřuje cestovní pojištění je pojištění léčebných výloh v případech náhlého onemocnění, úrazu nebo smrti v zahraničí. Podle portálu Finanční vzdělávání (Finanční vzdělávání, 2010) je většinou z tohoto pojištění hrazeno:

- Ambulantní lékařské ošetření
- Předepsané léky a zdravotnický materiál
- Hospitalizace
- Lékařsky neodkladná operace
- Převoz nemocného do ČR
- Převoz tělesných ostatků do ČR
- Zubní ošetření k odstranění akutní bolesti

- Případně další doplňkové asistenční služby[‡‡]

1.1 MOŽNOSTI PŘIPOJIŠTĚNÍ

Jednotlivé instituce nabízí další možnosti připojištění, které budou také předmětem posuzování v i našem případě komparace pojistných produktů.

- Úrazové pojištění
- Pojištění cestovních zavazadel
- Pojištění odpovědnosti za škodu
- Pojištění storna zájezdu

Výše pojistného je potom závislá na okolnostech zahraniční cesty, jako jsou věk pojištěného, délka jeho pobytu v zahraničí, zaměření cesty (turistická, pracovní, se sportovním zaměřením) a územní platnost (Evropa, svět). Před uzavřením smlouvy je třeba se důkladně seznámit s pojistnými podmínkami, zejména s výlukami z pojištění (například výlukami škod způsobenými válečnou událostí nebo občanskou válkou, občanskými nepokoji, na nichž se pojištěný přímo podílel, vlastním jednáním, kdy vědomě nedodržel zákonná ustanovení platná v dané zemi atd.).

1.2 VOLBA KRITÉRIÍ PRO KOMPARACI PRODUKTŮ

Příklad, na kterém bude demonstrována metoda vícekriteriálního rozhodování, simuluje situaci, ve které pojištění uzavírá čtyřčlenná rodina, která hodlá vycestovat na šestidenní soukromou cestu do zahraničí, se zaměřením na provozování zimních sportů. K rekognoskaci nabídek jednotlivých pojišťoven byl využit internetový srovnávač pojistných produktů (www.top-pojisteni.cz, 2010).

[‡‡] (dle jednotlivých pojistných podmínek jednotlivých produktů)

Pro komparaci byla vybrána nabídka 8 pojišťoven, ve které byla kromě ceny za pojistnou ochranu posuzována tato kritéria:

- ✓ Limit pojistného plnění pojištění léčebných výloh.

Základem cestovního pojištění je úhrada léčebných výloh na ošetření v případě, že pojištěný v zahraničí onemocní nebo utrpí úraz. Z tohoto pojištění pojišťovna uhradí náklady za ošetření, hospitalizaci, léčení, výlohy na léky, nezbytné převozy apod. Součástí pojištění zpravidla bývá i repatriace či převoz tělesných ostatků v případě úmrtí pojištěného. Některé pojišťovny nabízejí i úhradu nákladů na přivolání a pobyt opatrovníka - blízké osoby.

- ✓ Nabídka asistenční služby.

Asistenční služba pomůže pojištěnému v nouzové situaci s vyhledáním a převozem do vhodného zdravotního zařízení, poskytne platební garance léčby, zajistí potřebné léky, vyslání opatrovníka apod. V případě okradení služba zajistí zaslání potřebné finanční částky a pomůže s vyřízením náhradních cestovních dokladů.

- ✓ Možnost připojištění úrazového pojištění a limit jeho pojistného plnění.

Rozšíření cestovního pojištění o úrazové pojištění zahrnuje pojistné plnění v případě trvalých následků úrazu, smrt na následky úrazu a odškodné. Pojistné plnění je vypláceno pojištěnému po návratu z cesty nebo případně pozůstalým osobám.

- ✓ Možnost připojištění zavazadel a limit jeho pojistného plnění.

Pojištění zavazadel se vztahuje na věci osobní potřeby, které se obvykle berou s sebou na cestu (např. oblečení, obuv, toaletní potřeby, hodinky, fotoaparát aj.) a které patří pojištěnému, a dále na věci, které si pojištěný prokazatelně pořídil v průběhu dovolené. Věci, které jsou předmětem pojištění, jsou detailně vyjmenovány v pojistných podmínkách cestovního pojištění každé pojišťovny.

- ✓ Možnost připojištění odpovědnosti za škodu a limit jeho pojistného plnění.

Připojištění odpovědnosti za škodu se vztahuje na odpovědnost za škody způsobené třetí osobě v zahraničí při běžných činnostech jako je sport, rekreace a zábava - a to jak na zdraví, tak na majetku. Dále kryje nároky zdravotních pojišťoven a pojistitelů majetku, kteří se po zaplacení plnění poškozenému domáhají zaplacení škody na viníkovi.

- ✓ Možnost slevy při uzavření pojistky přes internet.

Sjednávání pojistek přes internet je pro pojišťovny výrazně levnější, což se také promítá v konečné ceně pojistného. Některé pojišťovny nabízejí při on-line uzavření pojistky slevu na pojistném.

2 VÍCEKRITERIÁLNÍ ROZHODOVÁNÍ

Problematika vícekriteriálního rozhodování spadá do oblasti operačního výzkumu (Jablonský 2007, Fiala 2008). Vícekriteriální rozhodování bývá obvykle rozděleno na dvě hlavní kategorie, a to na vícekriteriálního programování a vícekriteriální hodnocení variant. Náš případ spadá do druhé oblasti, tj. zabýváme se problémem vícekriteriálního hodnocení variant, kde je nutné specifikovat varianty, které hodnotíme, a kritéria, dle kterých hodnotíme. Kritéria byla popsána v předchozí kapitole, variantami jsou zde pojistné produkty jednotlivých pojišťoven. Na základě dostupných údajů jsme se přiklonily k využití metod s kardinální informací, neboť získaná data umožňují srovnat jednotlivé pojišťovny dle každého kritéria nejen do pořadí, ale také ve většině kritérií jsme schopny specifikovat, o kolik je jedna pojišťovna lepší/horší než druhá dle daného kritéria. Pro srovnání pojišťoven jsme tedy zvolily 3 základní metody vícekriteriálního hodnocení variant, a to metody WSA, TOPSIS a ELECTRE III. Nastíníme zde pouze principy těchto metod, podrobnější postup výpočtu viz Fiala (2008). Pro toto hodnocení jsou také potřeba váhy kritérií, které jsme stanovily následovně:

Tabulka 1: Váhy kritérií

kritérium	Odpovědnost	Zavazadla	Úrazové pojištění	Asistence	Sleva on-line	Léčebné výlohy	Cena
váha	0,1	0,1	0,1	0,1	0,05	0,05	0,5

2.1 POPIS VYBRANÝCH METOD

Metoda WSA

Metoda váženého součtu patří mezi metody založené na principu maximalizace užitku, tj. předpokládá možnost vyčíslení užitku, který každá hodnocená varianta dosahuje v každém sledovaném kritériu, a to na škále od 0 do 1. Vyšší varianta užitku znamená větší vhodnost varianty pro rozhodovatele. Z pohledu všech kritérií se varianta ohodnotí celkovou hodnotou užitku, kterou dostaneme agregací dílčích hodnot užitku s použitím vah kritérií.

Metoda TOPSIS

Metoda TOPSIS spadá do skupiny metod, které využívají princip minimalizace vzdálenosti od ideální varianty. K seřazení variant používá relativní ukazatel vzdálenosti od bazální varianty, který nabývá hodnot z intervalu <0,1>. Čím vyšší je hodnota tohoto ukazatele, tím je varianta vzdálenější bazální (nejhorší, hypotetické) a bližší ideální variantě.

Metoda ELECTRE III

Metoda ELECTRE III je jednou z metod třídy ELECTRE, které využívají principu preferenčních relací, tj. párového srovnání variant dle jednotlivých kritérií. Výpočtem preferenční matice se určí, na kolik procent je varianta preferována před ostatními. Varianta s nejvyšším stupněm preference či s nejvyšším počtem shodných preferenčních stupňů je označena jako efektivní. Pokud je takovýchto variant více, jsou rozděleny do tzv. indiferenčních tříd. Obvykle je metoda používána k rozdělení variant na efektivní a neefektivní, my jsme se snažili především získat vítěznou pojišťovnu a případně určit i další pořadí pojišťoven.

2.2 VÝSLEDKY SROVNÁNÍ

Výpočty jsme prováděly v aplikaci Sanna[§§] pro vícekriteriální hodnocení variant. Vycházeli jsme tedy z následující tabulky:

Tabulka 2: Data pro srovnání

Pojišťovna	Odpovědnost[1]	Zavazadla[2]	Úrazové pojištění[2]	Asistence	Sleva on-line[3]	Léčebné výlohy[1]	Cena
ČSOB	0	0	0	0	0	1,5	360 Kč
Adria Way	0	15	0	0	0	1,5	427 Kč
KB Pojišťovna	0	0	0	0	0	1,3	534 Kč
Generali	0	0	0	1	15	1,7	576 Kč
Uniqa	1	15	300	1	0	2,0	734 Kč
Česká pojišťovna	0	0	0	1	0	1,5	821 Kč
Kooperativa	2	15	200	1	10	1,5	1 134 Kč
Evropská cestovní pojišťovna	4	30	400	1	0	3,0	3 800 Kč
váha	0,1	0,1	0,1	0,1	0,05	0,05	0,5

[§§] Aplikaci lze získat ze stránek http://nb.vse.cz/~JABLON/

Zdroj: srovnávač pojistných produktů (www.top-pojisteni.cz, 2010)

[1] limity pojistného plnění v mil. Kč

[2] limity pojistného plnění v tis. Kč

[3] sleva v % z pojistného

Všechna kritéria jsou maximalizačního typu, tj. požadujeme co nejvyšší limity plnění, až na kritérium cena, které je naopak minimalizačního typu. Již z této tabulky je patrné, že KB Pojišťovna si vede hůře než např. Adria Way, tj. KB Pojišťovna nebude nikdy na prvním místě. Stejně tak to platí pro Českou pojišťovnu, která bude vždy horší než pojišťovna Uniqa. Výsledné pořadí dle jednotlivých metod udává Tabulka 3.

Bez ohledu na použitou metodu vítězí pojišťovna Uniqa, která sice nenabízí nejlevnější cestovní pojištění, avšak poněkud vyšší cena je vykompenzována dalšími nabídkami (např. jedním z nejvyšších limitů pojistného plnění na úrazové pojištění). Pořadí na dalších místech se mírně liší dle použité metody (např. Kooperativa se umísťuje na druhém místě, avšak vyšší cena a vyšší důležitost tohoto kritéria způsobují při párovém srovnání v metodě ELECTRE III její sestup až na páté místo). Jak jsme předpokládali, KB Pojišťovna a Česká pojišťovna se umísťují ve spodní části. Nejhůře však, zejména vzhledem k nesrovnatelně vysoké ceně (která je pro nás nejdůležitějším kritériem), dopadla nabídka Evropské cestovní pojišťovny.

Tabulka 3: Pořadí pojišťoven

Pojišťovna / METODA	WSA	TOPSIS	ELECTRE III
ČSOB	6	5	4
Adria Way	4	3	2
KB Pojišťovna	7	6	6
Generali	3	4	3
Uniqa	1	1	1
Česká pojišťovna	5	7	7
Kooperativa	2	2	5
Evropská cestovní pojišťovna	8	8	8

Zdroj: vlastní výpočty

3 ZÁVĚR

Cílem tohoto příspěvku bylo vyhodnocení nabídky cestovního pojištění pro konkrétního klienta za pomoci metod vícekriteriálního rozhodování. Pro komparaci bylo použito několik metod, z nichž každá pracuje na odlišném principu (maximalizace užitku, minimalizace vzdálenosti od ideální varianty, preferenční relace), takže výsledné pořadí bylo odlišné. Pro určení tohoto pořadí bylo potřeba, kromě znalosti variant a kritérií, určit také váhy jednotlivých kritérií, které udávají procentní důležitost daného kritéria pro konkrétního pojistníka.

Jako nejvýhodnější produkt byl všemi metodami shodně označen produkt pojišťovny Uniqa, který zahrnuje všechny možnosti připojištění s průměrnými pojistnými limity, za přijatelnou cenu.

LITERATURA

[1] *business.center.cz*. (2010). Získáno 8. 11 2010, z business.center.cz: http://business.center.cz/business/pravo/zakony/pojistovnictvi/priloha2.aspx

[2] Fiala, P.: Modely a metody rozhodování. Praha, Oeconomica, 2008. ISBN 978-80-245-1345-4

[3] *Finanční vzdělávání*. (2010). Načteno z www.financnivzdelavani.cz: http://www.financnivzdelavani.cz/webmagazine/page.asp?idk=415

[4] Jablonský, J.: *Operační výzkum – kvantitativní modely pro ekonomické rozhodování.* Professional Publishing, Praha 2007, ISBN 978-80-86946-44-3

[5] *www.cap.cz*. (2010). Získáno 8. 11 2010, z Česká asociace pojišťoven: http://www.cap.cz/Folder.aspx?folder=Lists/Menu/Pr%C5%AFvodce+poji%C5%A1t%C4%9Bn%C3%ADm/Poji%C5%A1t%C4%9Bn%C3%AD+dle+druhu+rizika/Cestovn%C3%AD+poji%C5%A1t%C4%9Bn%C3%AD

[6] *www.top-pojisteni.cz*. (2010). Získáno 8. 11 2010, z www.top-pojisteni.cz: http://www.top-pojisteni.cz/cestovni-pojisteni/kalkulace-a-srovnani

[7] Zákon o pojišťovnictví. (1999). *Zákon č. 363/1999 Sb., o pojišťovnictví*.

VEŘEJNÉ ZAKÁZKY Z POHLEDU KVANTITATIVNÍ ANALÝZY

MARTINA ZOUHAROVÁ ***

Abstrakt:

Článek se zabývá kvantitativní analýzou legislativního rámce veřejných zakázek, který ve své stávající úpravě umožňuje zadavateli volbu hodnotící metody obdržených nabídek v zadávacím řízení. Snahou je skrze praktický příklad poukázat na vliv tohoto výběru na konečný výsledek zadávacího řízení, a zároveň tak v této souvislosti demonstrovat nutnost znalostí uchazečů v oblasti fungování příslušných vícekriteriálních hodnotících metod.

Klíčová slova (keywords):

Veřejná zakázka, vícekriteriální hodnocení variant.

ÚVOD

Trh veřejných zakázek má v každé zemi značný ekonomický význam a vzhledem ke své povaze představuje pro podnikatelský sektor velmi lukrativní obchodní příležitost. Výhoda obchodních vztahů, jejichž zadavatelem je stát či jiný veřejný subjekt, spočívá oproti běžným obchodním vztahům zejména v solventnosti veřejných subjektů, vyšší míře jistoty plnění závazků a bohužel do značné míry také ve zvýšené nedbalosti ze stany správců veřejného majetku v případě nakládání s tímto majetkem, nežli je tomu u přímých vlastníků majetku soukromého. To, že si tento trh zaslouží pozornost podnikatelských subjektů, je možné ilustrovat také pomocí informace, že pouze během roku 2009 bylo v ČR uskutečněno 8852 veřejných

*** *Martina, Zouharová, Ing., VŠE Praha, nám. Winstona Churchilla 4, Praha 3, 130 67, email:em.zouharova@gmail.com*

zakázek, v nichž zadavatelé mezi vítězné subjekty rozdělili celkem 209 mld. Kč [3].

Zásadním okamžikem ve snaze podnikatelských subjektů uspět na poli složité problematiky veřejných zakázek během častokráte nepříliš transparentních zadávacích řízení je podání nabídky zadavateli. Obsahová a formální úplnost předložených dokumentů by měla být samozřejmostí. U finančně zajímavých veřejných zakázek by člověk však očekával jako samozřejmé, vzhledem k tomu, že každá neznalost může mít pro uchazeče poměrně významné ekonomické důsledky, i vyšší nasazení. To, že ne vždy se toto očekávání naplní, lze velmi zdařile ilustrovat na případu tendru na vyplácení dotací z EU. Abychom mohli tento praktický příklad v této souvislosti použít k demonstraci některých zajímavých jevů souvisejících s kvantitativní analýzou, bude dobré, se nejprve blíže obeznámit s genezí vyplácení dotací z EU.

Historicky vyplácela dotace ze státního rozpočtu Česká spořitelna, s pomocí působení „setrvačných sil" postupně přibírala do svého systému vyplácení i agendu dotací z fondů EU a stala se v tomto směru samovolně monopolem. Za tuto službu inkasovala Česká spořitelna ze státního rozpočtu finanční odměnu v řádech sta milionů [6] a není proto překvapivé, že jiné banky v ČR se začaly o tento „monopol" zajímat a zároveň apelovat na Ministerstvo financí, aby bylo vypsáno na takto zajímavou zakázku řádné výběrové řízení. Ministerstvu vzhledem k platné legislativě nezbývalo, než tento apel vyslyšet, a tak byl na podzim roku 2005 vypsán tendr na finančního manažera státu. Do boje o tuto zajímavou státní zakázku se přihlásily: Česká spořitelna, ČSOB a HVB bank v konsorciu s Českou pojišťovnou. Přestože jedním z nejaktivnějších iniciátorů tohoto tendru byla Komerční banka, prvního kola tendru se nezúčastnila. Termín „první kolo" je zde použit záměrně, neboť výsledky prvního tendru byly anulovány. Toto anulované první kolo je zářným příkladem toho, že na znalosti či neznalosti zcela fundamentálních matematických pravidel může v ekonomické praxi záviset zisk či ztráta velmi lukrativních zakázek. Důvod, proč nemohlo být první kolo vyhodnoceno, byla totiž neznalost pravidla, že nulou dělit nelze. Ale nepředbíhejme.

V roce 2005 byla v zákoně o veřejných zakázkách ještě zakotvena povinnost užít k hodnocení nabídek výhradně bodovací metody (§ 8 vyhlášky č. 240/2004 Sb., zrušeno zákonem č. 137/2006 Sb., o veřejných zakázkách s účinností od 1.7.2006), a to pro všechny případy hodnocení dle ekonomické výhodnosti (vyhláška č. 240/2004 Sb.). Pro pravidla výpočtu bodovací metody uvádím výňatek z § 8 vyhlášky č.240/2004 Sb.:

(3) Pro hodnocení nabídek použije hodnotící komise bodovací stupnici v rozsahu 0 až 100. Každé jednotlivé nabídce je dle dílčího kritéria přidělena bodová hodnota, která odráží úspěšnost předmětné nabídky v rámci dílčího kritéria. Pro číselně vyjádřitelná kritéria, pro která má nejvhodnější nabídka maximální hodnotu kritéria, například doba záruky, výše smluvní pokuty, získá hodnocená nabídka bodovou hodnotu, která vznikne násobkem 100 a poměru hodnoty nabídky k hodnotě nejvhodnější nabídky. Pro číselně vyjádřitelná kritéria, pro která má nejvhodnější nabídka minimální hodnotu kritéria, například cena nabídky, doba provádění, získá hodnocená nabídka bodovou hodnotu, ***která vznikne násobkem 100 a poměru hodnoty nejvhodnější nabídky k hodnocené nabídce****. Pro kritéria, která nelze vyjádřit číselně, sestaví hodnotící komise pořadí nabídek od nejvhodnější k nejméně vhodné a přiřadí nejvhodnější nabídce 100 bodů a každé následující nabídce přiřadí nižší bodové hodnocení, a to o podíl 100 a počtu účastníků.*

Ekonomické důsledky nedůsledného přečtení, či nepochopení třetího odstavce, nám nepřísluší hodnotit. Pozastavit se však nad tím, že banka, která po vynaložení jistě nemalého obnosu finančních prostředků na analýzu přínosů nabídky, na základě které dospěje k názoru, že její lukrativnost je pro banku natolik velká, že je ochotna dosavadním sta milionovým poplatkům konkurovat poplatkem nulovým, nevěnuje dostatečnou pozornost tomu, jak funguje legislativou daná hodnotící metoda, musíme. Jeden jediný student se základní znalostí matematiky, by býval mohl po přečtení třetího odstavce výše citovaného výňatku z §8 vyhlášky č.240/2004 Sb. zachránit úspěch nabídky tvořené celými týmy „profesionálů“.

První kolo bylo tedy zrušeno oficiálním zdůvodněním Ministerstva financí ČR, že „vzhledem k nulové nabídkové ceně jednoho z uchazečů nebylo možné provést hodnocení nabídek“. Došlo tedy k vyhlášení kola druhého. Jak to zahýbalo nabídkovými cenami, ilustruje tabulka 1.

Tabulka 1: Nabídkové ceny jednotlivých bank v 1. a 2. kole tendru

	1. kolo	2. kolo
ČSOB	0	1 200 Kč
ČS	36 mil. Kč	12 mil. Kč
HVB + ČP	56 mil. Kč	0,50 Kč
KB	–	100 mil. Kč

Z této tabulky je patrné, že vyjma KB uchazeči pochopili, že pokud se v následujících čtyřech letech poplyne skrze jejich bankovní instituci přes 100 miliard Kč, může to skýtat i jiné finanční přínosy než pouze poplatky za poskytovanou službu. HVB bank, aby nemohla být nařčena z nulové nabídkové ceny, zvolila vzhledem k české měně druhou nejmenší možnou částku – tedy 50 haléřů. ČSOB, aby se vyhnula problémům z prvního kola, stanovila novou cenu na 1200 Kč. Ačkoliv se tyto nabídky jeví z hlediska státního rozpočtu a souvisejícího objemu peněz jako zcela identické, v rozhodnutí o výsledku tendru sehrály nakonec vzhledem ke způsobu fungování bodovací metody zcela klíčovou roli a opět tak potvrdily, že chceme-li ve světě veřejných zakázek uspět, je potřeba se s fungováním jednotlivých hodnotících metod důkladně obeznámit.

Ve druhém tendru tedy nakonec díky zcela zanedbatelnému rozdílu v nabídkové ceně zvítězilo konsorcium HVB Bank s Českou pojišťovnou. Poté sice následoval vleklý právní spor na ÚOHS, kam se Česká spořitelna proti výsledku a postupu při vyhodnocení tendru odvolala, ovšem od 1.1.2007 konsorcium již začalo s plněním smlouvy uzavřené s MF ČR a jelikož byly výsledky tendru následně potvrzeny, vyplácí dotace dodnes.

1 VEŘEJNÁ ZAKÁZKA NA FINANČNÍHO MANAŽERA STÁTU

Ze zákona č.40/2004 Sb. § 55 vyplývá, že základním hodnotícím kritériem pro veřejné zakázky je nejnižší nabídková cena nebo ekonomická výhodnost předložené nabídky. Rozhodne-li se zadavatel pro ekonomickou výhodnost, je dále povinen stanovit dílčí kritéria, jimž musí být zadavatelem přiřazeny odpovídající váhy a alespoň jedno z těchto kritérií musí představovat nabídková cena.

Hodnotící kritéria a jejich váhy byly v tomto případě následující:

Tabulka 2: Hodnotící kritéria a příslušné váhy

Hodnotící kritérium	Váha
Nabídková cena	0,5
Hustota sítě poboček	0,2
Řešení technické komunikace s klienty	0,2
Úročení kreditních zůstatků	0,1

Abychom však demonstrovali, že ani „pouhá“ znalost fungování metod vícekriteriálního hodnocení variant v labyrintu světa veřejných zakázek nestačí k tomu, aby se v něm uchazeč neztratil a mohl obstát, uvádíme některé zajímavosti a komplikace spojené s jednotlivými hodnotícími kritérii.

1.1 NABÍDKOVÁ CENA

V platné relevantní legislativě se hovoří o očekávané nabídkové ceně. Důležitost očekávané nabídkové ceny tkví zejména v tom, že je ve vztahu k ní zadavatelem posuzována případná neadekvátně nízká nabídková cena. Ministerstvo financí stanovilo po dosavadních zkušenostech s Českou spořitelnou očekávanou cenu pro první kolo tendru na 296 mil. Kč [6]. Oproti této částce by se tedy nabídka ČSOB dozajista jako neadekvátně nízká jevit mohla. Odstavec § 61 zákona č.40/2004 Sb. říká, že „*hodnotící komise* *posoudí výši nabídkových cen ve vztahu k předpokládané ceně předmětu veřejné zakázky. Jestliže nabídka obsahuje mimořádně nízkou nabídkovou cenu ve vztahu k předmětu veřejné zakázky, musí si hodnotící komise vyžádat od uchazeče písemné zdůvodnění.*“ Pokud zdůvodnění není zadavatelem za objektivní uznáno, lze variantu z řízení dokonce vyřadit.

V tomto případě zdůvodnění bank objektivitu nepostrádalo, a přestože z výše uvedené formulace je zřejmé, že to ještě nemusí znamenat, že za objektivní bude opravdu uznáno, stalo se. Vyplácení dotací znamená přijít do styku přibližně s 15 000 příjemci dotací za rok, kteří si v bankovní instituci zřídí tzv. „technický účet“. To, spolu s další komunikací a konzultacemi s žadateli, přináší možnost akvizice nových klientů a je pouze na bance, jak dalece tento potenciál využije. Denní zůstatek na účtu pro vyplácení dotací se navíc pohybuje v rozmezí 100 až 300 mil. Kč a banka tedy může s tímto vědomím s penězi operovat.

1.2 HUSTOTA SÍTĚ POBOČEK

Hustota sítě poboček je kritériem, které zdánlivě naznačuje, že ne všechna kritéria je možno v předložené nabídce nějak výrazněji ovlivnit. Toto výběrové kritérium bylo nejvíce nepříznivé pro HVB bank, která původně disponovala pouze 25 pobočkami. Svůj handicap se však rozhodla řešit uzavřením konsorcia s Českou pojišťovnou, a tak zvýšila počet poboček na 203.

1.3 ŘEŠENÍ TECHNICKÉ KOMUNIKACE S KLIENTY

Technická komunikace s klientem měla i nadále probíhat přes systém ISPROFIN a banky byly vyzvány, aby předložily návrh demoverze této komunikace. Zdánlivě jednoduché zadání bylo však komplikováno zejména tím, že žádná z bank (kromě České spořitelny) systém ISPROFIN nikdy neviděla. MF ČR odmítlo v této záležitosti jakékoliv bližší informace sdělit a poskytnutí informací smluvně zakázala i firmě, která pro MF ČR ISPROFIN vyvinula. Jedinou indicií tak zůstalo, že systém musí být schopen přijímat soubory typu „*.dbf“. Na další konkretizující otázky poslalo MF ČR uchazečům vyrozumění, že „očekávají návrh uchazeče“. Zde se tak poněkud vytrácí transparentnost zadání a vyvstává prostor pro pochyby o důvěryhodnosti celého řízení. Je zřejmé, že pokud by jeden z účastníků disponoval nějakými informacemi navíc, může mu toto zvýhodnění přinést vítězství v celém zadávacím řízení. Zákon se na takovéto případy snaží pamatovat a ukládá zadavateli povinnost zodpovědět zájemcům jakékoli konkretizující otázky týkající se těch míst zadání, jímž ze strany uchazečů nebylo porozuměno. Vzhledem k nekonkrétnímu zadání a odmítavému postoji MF ČR upřesnit své požadavky lze toto vnímat jako slabé místo tendru, které by mohlo být dle legislativního rámce napadeno, vést tedy případně i k jeho novému vypsání a popřípadě i jiným výsledkům.

Bodování předložených demoverzí nakonec proběhlo na základě zpráv expertů a pohybovalo se na škále 0 – 100 bodů.

2 VÍCEKRITERIÁLNÍ HODNOCENÍ VARIANT

V následující kapitole se pokusíme představit několik vícekriteriálních hodnotících metod. Cílem není čtenáře obeznámit se všemi metodami, na něž je možno v ekonomické praxi narazit. Snahou bude však na zvoleném příkladě demonstrovat vliv výběru metody na konečný výsledek.

2.1 KRITERIÁLNÍ MATICE

Tabulka 3: Výchozí kriteriální matice

	Nabídková cena (Kč)	Hustota sítě poboček (Ks)	Technická komunikace (body 0-100)	Výše úročení kreditních zůstatků (%)
ČSOB	1200	1048	100	1,568
ČS	12 000 000	645	60	0,1
HVB + ČP	0,5	203	90	1,95
KB	100 000 000	359	70	0,73

Vzhledem k faktu, že všechna kritéria jsou maximalizační, můžeme danou kriteriální matici rovnou normalizovat. Normalizovaná matice (r_{ij}) vzniká transformací původní kriteriální matice (y_{ij}) dle vztahu

$$r_{ij} = \frac{y_{ij} - D_j}{H_j - D_j}$$

kde D_j představuje dolní (bazální) hodnotu pro j-té kritérium a H_j naopak horní (ideální) hodnotu pro j-té kritérium.

Tabulka 4: Normalizovaná kriteriální matice

	Nabídková cena (Kč)	**Hustota sítě poboček (Ks)**	**Technická komunikace (body 0-100)**	**Výše úročení kreditních zůstatků (%)**
ČSOB	0,999988	1	1	0,793514
ČS	0,88	0,523077	0	0
HVB + ČP	1	0	0,75	1
KB	0	0,184615	0,25	0,340541

2.2 METODA WSA

Metoda váženého průměru vychází z principu maximalizace užitku a bezesporu patří mezi nejjednodušší. Snadnost pochopení bývá také jedním z důvodů jejího častého použití „neodborníky“ v podobě manažerů. Její nevýhoda spočívá v tom, že funkci užitku, na níž je založena, předpokládá pouze lineární. Výpočet je skalárním součinem vektoru vah kritérií a prvků z normalizované kriteriální matice a pro *k* variant má podobu:

$$\sum_{j=1}^{k} v_j r_{ij}$$

Je zřejmé, že metoda WSA je závislá dosti na vahách kritérií [2]. Vzhledem k zadání by se dalo očekávat potvrzení výsledku reálného tendru. Výsledné hodnocení variant dle metodou WSA, tj. na základě maximalizace užitku je uvedeno v tabulce 5.

Tabulka 5: Pořadí nabídek dle metody WSA

Pořadí	Banka	Celkový počet bodů
1.	ČSOB	97,93
2.	HVB+ČP	75
3.	ČS	54,46
4.	KB	12,10

Vidíme, že kompromisní variantou by v případě hodnocení metodou WSA nebylo konsorcium HVB Bank a České pojišťovny, ale ČSOB.

2.3 METODA CDA

U metody CDA (neboli metody shody a neshody) závisí na vážených hodnoceních a na váhách samotných. Za výhodu metody CDA můžeme považovat její oddělený postup, kdy indexem shody jsou nejdříve vyhodnocovány váhy kritérií na základě porovnání nevážených hodnocení a indexem neshody jsou vyhodnocována vážená hodnocení jednotlivých alternativ.

Výpočet metodou CDA je náročnější (my jsme užili software MCA7), avšak jeho výhoda by do jisté míry měla spočívat ve vyšší míře objektivity vítězného řešení.

Tabulka 7: Pořadí nabídek dle metody CDA

Pořadí	Banka	Celkový počet bodů
1.	ČSOB	0,0207
2.	HVB+ČP	0,25
3.	ČS	0,4554
4.	KB	0,879

Vidíme, že za kompromisní řešení je opět označena nabídka ČSOB.

2.4 PERMUTAČNÍ METODA

Permutační metoda má nevýhodu spočívající zejména v náročnosti výpočtu, kdy při *k* variantách musíme provést *k*! výpočtů, což při větším rozsahu úlohy je dost i na čekání u počítače. Protože však zadaná úloha nemá velký rozsah (uvedené 4 varianty = 24 permutací), není těžké v tomto konkrétním případě počítat i bez softwaru.

Postup je založen na tom [1], že pro každou permutaci určíme pro každou dvojici variant (a_i,a_j) všechna kritéria, pro která je a_i preferováno před a_j, či kde platí indiference. Množinu indexů těchto kritérií označíme I_{ij}. Pro každé (a_i,a_j) stanovíme hodnotu c_{ij} dle vztahu:

$$c_{ij} = \sum_{h \in I_{ij}} v_h .$$

Z hodnot c_{ij} sestavíme pro každou permutaci matici $\mathbf{C} = (c_{ij})$. Optimální pořadí jednotlivých variant pak vybereme dle permutace, pro niž je hodnota R počítaná dle výrazu

$$R = \sum_{i<j} c_{ij} - \sum_{i>j} c_{ij}$$

maximální.

V našem příkladě je maximální hodnota R rovna 3,8 a odpovídající pořadí variant (od nejvýhodnější po nejméně výhodnou) má opět podobu ČSOB, HVB + ČP, ČS a KB.

2.5 BODOVACÍ METODA

Nakonec se dostáváme k použité bodovací metodě, kterou zadavatelům ukládal použít do 1.7.2006 dokonce zákon. Způsob jejího fungování jsme naznačili již v úvodu, proto se budeme věnovat pouze nejzajímavější části, a sice bodovému porovnání nabídek ČSOB a konsorcia HVB a ČP.

Tabulka 7: Srovnání bodového hodnocení dle bodovací metody

	Nabídková cena	**Hustota sítě poboček**	**Technický návrh komunikace s klientem**	**Výše úročení kreditních zůstatků**
HVB + ČP	100	19,37	90	100
ČSOB	0,041667	100	100	80,41

Pro nás je nejzajímavější bodové hodnocení vázající se k nabídkové ceně. Jak již bylo řečeno v úvodu, zanedbatelný rozdíl v nabídkové ceně měl za následek zcela zásadní rozdíl v bodovém hodnocení dvou nejvíce konkurenčních variant.

Vypočítané body násobené váhovými koeficienty sečtené pro jednotlivé varianty ukazuje tabulka 8.

Tabulka 8: Celkové bodové hodnocení nejvíce konkurenčních variant

ČSOB	48,06
HVB + ČP	81, 87

Je tedy zřejmé, že užití bodovací metody vede jako jediné k označení skutečné kompromisní varianty, která tendr na finančního manažera státu vyhrála, tj. konsorcia HVB + ČP.

ZÁVĚR

Na uvedeném, praktickém příkladě je demonstrován fakt, že volba jakékoli jiné hodnotící metody (nežli bodovací) by vedla k označení jiné kompromisní varianty, tj. ČSOB. Vždy je proto dobré, seznámit se s tím, jakým způsobem hodnotící metoda pracuje a zvážit, jak je s ohledem na takové informace možno vlastní nabídku přizpůsobit.

Je evidentní, že pokud by tým expertů z ČSOB měl na paměti jedno z fundamentálních matematických pravidel, že nelze dělit nulou, jednoznačně by zakázku získal již v prvním kole tendru. Pokud by se ČSOB poučila ze své nepozornosti a obeznámila se s důsledky i malého, či z pohledu zakázky zanedbatelného rozdílu v nabídkové ceně, jistě by jim nepřišlo 1200 Kč jako synonymum k téměř „nulové nabídkové ceně“ (byť by selský rozum říkal opak) a zakázku by získala v kole druhém.

LITERATURA

[1] FIALA, P.: Modely a metody rozhodování. Praha: Oeconomia, 2008. ISBN 978-80-245-1345-4.

[2] KORVÍNY, P.: Aplikace multikriteriální analýzy při nasazování dálkově řízených prvků v distribučních sítích vysokého napětí. Ostrava, 2003. Disertační práce na VŠB-TUO. Vedoucí disertační práce Zdeněk Hradílek.

[3] Kdo komu rozděloval. *Podnikatel* [online]. Únor 2009, č. 2, s. 4. [cit. 2010-10-10]. Dostupné z <http://podnikatel-info.cz/archiv.php>

[4] Zákon č. 40/2004 Sb., o veřejných zakázkách, Zákon o veřejných zakázkách a koncesní zákon s vysvětlivkami a předpisy souvisejícími. Praha: Linde, 2006. 543 s. ISBN 80-7201-629-6.

[5] Zákon č. 137/2006 Sb., o veřejných zakázkách, Zákon o veřejných zakázkách a koncesní zákon s vysvětlivkami a předpisy souvisejícími. Praha: Linde, 2006. 543 s. ISBN 80-7201-629-6.

[6] Zpráva o posouzení nabídek, UNICREDIT Bank: [interní dokument].

UPLATNENIE VYBRANÝCH METÓD VÝSKUMU V PRIEMYSELNEJ LOGISTIKE – VÝZNAM, PRÍNOSY TEÓRIE ZÁSOB K RIADENIU OBSTARÁVACEJ LOGISTIKY

HELENA VIDOVÁ[†††]

Abstrakt

Predkladaný článok pojednáva o aktuálnych požiadavkách praxe na optimalizáciu, zoštíhľovanie procesov v logistike, ako jedinej možnosti prežitia v dobe ovplyvnenej hospodárskou krízou. Možností ako sa to dá urobiť je niekoľko, buď sa budú paušálne zoškrtávať výdavky a obmedzovať akékoľvek rozvojové aktivity na úkor znižovania nákladov alebo sa k problému postavíme systematicky, podrobíme logistiku dôkladnému auditu a nasadíme metodický aparát, ktorý prinesie očakávané výsledky.

Kľúčové slová (keywords)

Logistika, metódy operačnej analýzy, optimalizácia, riadenie zásob, teória zásob.

ÚVOD

Logistika, hoci patrí medzi pomerne mladé vedné disciplíny, predstavuje významnú oblasť podnikania a v súčasnosti sa jej venuje veľká pozornosť. Je to dôsledok explózie informačných technológií, globalizácie a otvorenosti svetového trhu, ktorá vedie k vzniku podnikov operujúcich na celosvetovej úrovni.

V súčasnosti predstavuje odbor, v rámci ktorého môže podnik dosiahnuť podstatnú úsporu nákladov, súbor činností, ktoré majú

[†††] Helena Vidová, Doc. Ing. PhD., Paulínska 16, 917 01 Trnava, +4213311032, helena.vidova@gmail.com

obrovský potenciálny vplyv na spokojnosť zákazníkov - teda aj na objem predaja. Je to nástroj, ktorý možno efektívne využiť na získanie konkurenčnej výhody firmy. Uplatnenie logistiky sa však neobmedzuje iba na podnikovú sféru. Týka sa takých inštitúcií ako sú nemocnice, školy, armáda, organizácií poskytujúcich obchodné, bankové alebo aj finančné služby.

1 CHARAKTERISTIKA LOGISTIKY, VYMEDZENIE JEJ ZÁSADNÝCH PROBLÉMOV

Dôvodov, prečo sa etablovala logistika vo sfére hospodárskej bolo niekoľko. Predovšetkým bolo nutné riešiť stále zložitejšie výrobné a distribučné procesy, náväznosť jednotlivých čiastkových procesov tak, aby boli efektívne využité všetky kapacity. Stále viac rástli požiadavky na dopravu. Optimalizácia zásobovania smerovala k znižovaniu prostriedkov viazaných v zásobách.

Dnes hrá logistika v ekonomike naozaj kľúčovú úlohu a to v dvoch základných rovinách. Po prvé – logistika predstavuje jednu z hlavných výdajových položiek podniku a tým ovplyvňuje všetky ďalšie ekonomické aktivity, ktorými je zároveň sama ovplyvňovaná. Po druhé – logistika predstavuje plynulý pohyb mnohých ekonomických transakcií, pretože ak tovar nedôjde včas, zákazníci si ho nemôžu kúpiť. Ak nepríde na správne miesto alebo v správnom (neporušenom) stave, nemožno predaj uskutočniť. Narušením logistických funkcií teda utrpia všetky ekonomické aktivity resp. subjekty v rámci logistikého reťazca.

Čo to teda logistika je? Logistika podľa americkej logistickej spoločnosti National Council of Physical Distribution Management dnešnej „Council of Logistics Management“ ktorá ako prvá zadefinovala tento pojem v roku 1964 predstavuje [1]: *„proces plánovania, realizácie a riadenia efektívneho, výkonného toku a skladovania tovarov, služieb a súvisiacich informácií z miesta vzniku do miesta spotreby, ktorého cieľom je uspokojiť požiadavky zákazníkov“.* Táto definícia chápe logistiku iba ako realizátora hmotných tokov, jeho hlavným cieľom je úspora materiálových zdrojov, tzn. nákladová racionalizácia. Predstava o súčasnej logistike a jej náplni bola zhmotnená v definícii Európskej logistickej asociácie (ELA) [1]: „*Logistika je organizácia, plánovanie, riadenie a výkon toku tovaru – vývojom a nákupom začínajúc, výrobou a distribúciou podľa finálneho zákazníka končiac – tak, aby boli splnené všetky požiadavky trhu pri minimálnych nákladoch a minimálnych kapitálových výdavkoch“.* ELA popisuje logistiku ako funkciu, ktorá výrazne ovplyvňuje úroveň poskytovaných služieb a spokojnosť zákazníkov, ktorú možno efektívne využiť pre získanie konkurenčnej výhody.

Oblasť priemyselnej logistiky v podobe fungujúcej prepravy, skladovania a manipulácie zamestnáva až 25% zamestnancov, zaberá 55% plôch a tvorí až 87% času, ktorý strávi materiál v podniku. Prieskumy dokazujú, že tieto činnosti tvoria niekedy 15 až 70% celkových nákladov na výrobok a značne ovplyvňujú kvalitu výrobkov. Nesprávnou dopravou, manipuláciou a skladovaním sa znehodnocuje 3 – 5% materiálu. Prispôsobovanie výrobkov a výroby individuálnym požiadavkám zákazníkov, rast objednávok produktov cez internet, trend hromadnej výroby na zákazku – to sú faktory, ktoré neustále zvyšujú podiel logistiky na výslednom úspechu firmy.

Podniky však neustále bojujú s činnosťami, ktoré predstavujú tzv. slabé miesta, ktoré sa v prípade logistiky najčastejšie skrývajú v [4, 7]:

- *zásobách, prebytočnom materiály, komponentoch a náhradných dieloch* – materiál sa dodáva do podnikov predčasne alebo je ho príliš veľa, príčina je v nepresnej dokumentácii, v chybách plánovacieho systému alebo dodávateľa,

- *zbytočnej manipulácii* – zbytočné presuny materiálu, preskladnenie, preprava,

- *čakaní* – na súčiastky, materiál, informácie, dopravné prostriedky,

- *opravovaní porúch* – v dopravnom, manipulačnom, informačnom systéme,

- *chybách* – príprava materiálu a komponentov v nesprávnom množstve a čase,

- *nevyužitých prepravných kapacitách,*

- *nevyužitých schopnostiach zamestnancov*.

V rámci riešenia týchto nedostatkov sa v logistike možno oprieť o doleuvedený metodický aparát:

1) *Metódy slúžiace na analýzu logistických procesov a pohybu tovaru* (systémová analýza a syntéza, analýza ABC, analýza nákladov),

2) *Metódy na presné zobrazenie jednotlivých postupov a procesov* (teória grafov, vývojové diagramy, Ganttove diagramy, metódy sieťovej analýzy),

3) *Simulačné metódy* (pri projektovaní a riadení materiálového toku),

4) *Metódy prognózovania budúceho chovania sa procesov a pohybov v logistike,*

5) *Matematické metódy operačného výskumu.*

2 VYUŽITIE METÓD OPERAČNÉHO VÝSKUMU

Operačný výskum je disciplína zameraná na riešenie problémov manažmentu pomocou matematických modelov a metód. V USA sa často nazýva priamo ako „veda o manažmente“ (Management Science). V nemecky hovoriacich krajinách sa používanie týchto modelov a metód uvádza pod názvom podnikový výskum, (matematické) optimálne plánovanie alebo použitie matematických metód na prípravu optimálnych rozhodnutí [3]. Ďalej budeme pojmom operačný výskum (operačná analýza) rozumieť takú vednú disciplínu, ktorej *predmetom skúmania je štúdium a analýza operácií a procesov, ktoré prebiehajú alebo sú plánované v určitej* *organizačnej jednotke (podnik, závod, dielňa, a pod.), pričom štúdium a analýza týchto operácií sa najčastejšie uskutočňuje pomocou matematického modelovania.*

Medzi metódy, ktoré sú predmetom záujmu logistiky a pomáhajú odstraňovať slabé miesta, patria:

- *lineárne progamovanie* - využíva sa pre podporu rozhodovania manažmentu výrobných podnikov na riadenie logistiky na operatívnej úrovni (optimalizácia výrobného programu podniku, distribučné problémy, optimalizácia zásob atď.),
- *teória zásob* – rieši výšku prostriedkov (napr. zásob materiálu, surovín, palív, energií), ktoré sú nevyhnutné pre racionálnu úroveň fungovania výrobného systému,
- *teória hromadnej obsluhy* – zaoberá sa kvantitatívnym hodnotením sústav, schopných uspokojiť požiadavky hromadného charakteru v rámci procesu obsluhy,
- *teória obnovy* – rieši úlohy pre zaistenie hospodárneho, prevádzkového fungovania podnikového systému, resp. jeho časti (napr. dielne, skupín strojov pre daný rozsah výroby či pre požadované časové obdobie pri plánovanej úrovni využitia) za stanovený časový interval,
- *metódy sieťovej analýzy* – využívajú sa na zosúladenie časovej nadväznosti rôznych, vzájomne sa podmieňujúcich činností pri riadení rozsiahlych projektov (budovanie distribučného centra, výstavba montážnej haly a pod.) [2].

3 EFEKTÍVNE RIADENIE ZÁSOB – KONKURENČNÁ VÝHODA PODNIKU

Je takmer nemožné nájsť oblasť praktickej činnosti, kde sa neriešia otázky zásobovacieho procesu. Zásoby sú „nutným zlom“, náklady na ich udržiavanie tvoria 15 až 25 % všetkých nákladov, neprispievajú k tvorbe pridanej hodnoty finálnej produkcie a viažu finančné prostriedky vo výške 15 až 40 % finančných zdrojov [9].

Ak má podnik nedostatočné zásoby, nie je schopný vyrábať a tým prichádza o svoj zisk. Na druhej strane ak má podnik na sklade vyššie zásoby ako potrebuje, tieto zásoby mu viažu veľké množstvo finančných prostriedkov a tým tiež prichádza o zisk**.** Objem kapitálu viazaného v zásobách sa v slovenských firmách pohybuje na úrovni zachytenej v tabuľke 1.

Ako z uvedených údajov vyplýva najviac financií má v zásobách investovaný strojársky a stavebný priemysel. Je to dané charakterom odvetvia no aj tu je možné robiť zásahy, aby sme sa posunuli do priaznivejších čísel.

Tabuľka 1 Objem kapitálu uloženého v zásobách [9]

Oblasť priemyslu	Zásoby v % bilančnej sumy	Zásoby v % obratu
Spracovateľský	19.4	13.3
Chemický	12.8	11.8
Oceliarsky	19.7	14.2
Strojárstvo	26.8	22.3
Automobilový	16.8	10.1
Elektrotechnika	16.5	14.4
Stavebníctvo	24.8	15.3

Riadenie zásob predstavuje spôsob udržiavania zásob na požadovanej úrovni a s tým spojeného doplňovania zásob v podniku. Ide o vytvorenie návodu, ako riadiť zásoby určitého počtu položiek, ktorý popisuje:

1) objednávací systém, politiku, respektíve optimalizačný model doplňovania zásob,

2) faktory negatívne ovplyvňujúce výšku zásob a spôsoby ich eliminácie,

3) faktory pozitívne vplývajúce na redukciu hodnoty zásob a možnosť ich zavedenia v podmienkach konkrétnej firmy.

Správnym systémom riadenia zásob dosiahneme zníženie nákladov s nimi spojených, vyššie využitie strojov a personálu, zefektívnenie systému plánovania a riadenia výroby, zvýšenie produktivity, teda i lepšie ekonomické ukazovatele podniku [5,8].

evropský sociální fond v ČR EVROPSKÁ UNIE MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost Vysoká škola polytechnická Jihlava
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

4 PRÍSPEVOK TEÓRIE ZÁSOB K REGULÁCII AKTIVÍT OBSTARÁVANIA

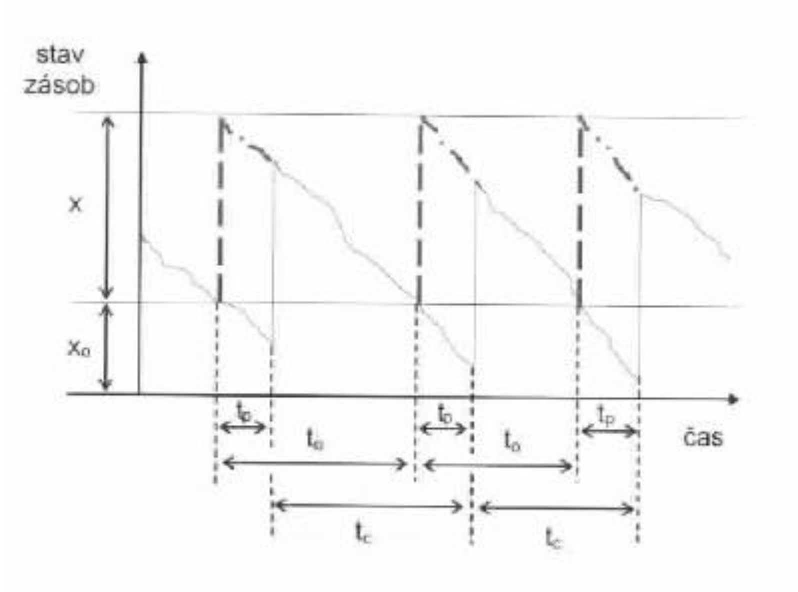
V manažérskej praxi má súbor metód teórie zásob široké pole uplatnenia. K typickým príkladom patrí racionálna výška a spôsob doplňovania zásob (výška, intervaly objednávania či zaisťovania), a to ako pre materiály, tak i suroviny, niektoré subdodávky, náradie či palivo. Môže ísť nielen o normálne zásoby, ale i o zásoby poistné, príp. viacúčelové rezervy.

V prípade, keď je spotreba zásob ***Q*** počas určitého obdobia dopredu presne známa, platí medzi frekvenciou dodávok ***v*** a veľkosťou dodávok ***x*** vzťah (1). Takáto situácia v praxi nastáva len výnimočne. Vo väčšine prípadov, má spotreba zásob pravdepodobnostný charakter, t.j. dochádza ku kolísaniu spotreby.

$$x = \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{x}} \qquad (1)$$

Tento vzťah platí iba pre stredné hodnoty týchto veličín. Kolísanie strednej hodnoty a teda aj skutočného stavu zásob okolo ich strednej hodnoty je potrebné vyrovnávať. Ide o dva spôsoby: zmenou frekvencie dodávok pri ich konštantnej veľkosti, alebo zmenou veľkosti dodávok pri pevnom intervale medzi nimi. Podľa toho rozlišujeme:

Q-systém riadenia zásob – pracuje s pevnými veľkosťami objednávok a kolísanie v spotrebe sa vyrovnáva zmenou frekvencie objednávok. Pri aplikácii sa stanoví signálny stav zásoby, ktorý slúži na pokrytie dopytu počas doby obstarávania zásob t_p a v okamihu, kedy skutočný stav zásoby dosiahne signálnej úrovne sa zadefinuje objednávka. Táto situácia je zachytená na obrázku 1, kde priebeh fyzickej zásoby je znázornený plnou čiarou a stav dispozičnej zásoby čiarou prerušovanou.



Obrázok 1 Q-systém riadenia zásob [6]

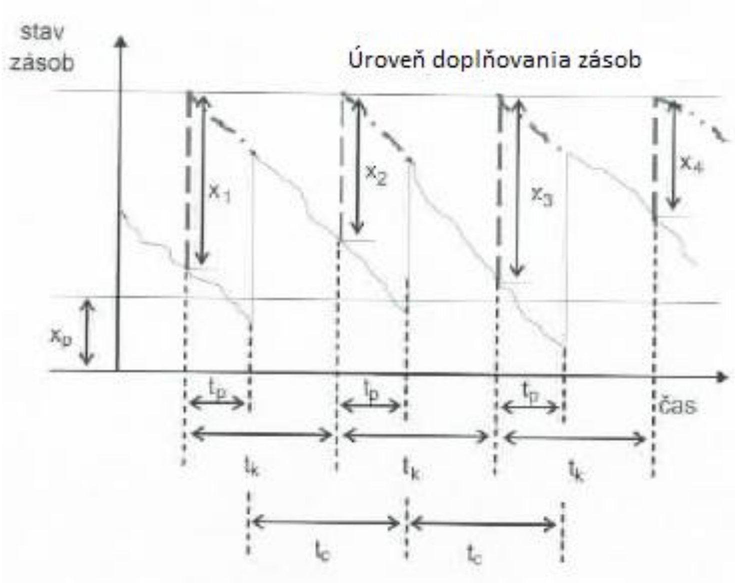
Poistná zásoba je v tomto prípade súčasťou signálneho stavu zásob a samostatne sa stanovuje len pre interval obstarania zásob t_p, t.j. kolísanie spotreby sa automaticky prejaví na zmene objednávacieho cyklu t_o. Ak sa zvýši spotreba položky nad očakávanú úroveň, klesne skutočná zásoba rýchlejšie na signálny stav a tým dôjde skôr k vystaveniu novej objednávky. V prípade nižšej spotreby sa okamih vystavenia novej objednávky naopak predĺži. Tento princíp sa však nedá uplatniť v čase obstarávania zásob, kedy sa podnik chráni voči takýmto výkyvom vhodne stanovenou poistnou zásobou.

Q- systém je vhodné použiť pre relatívne rovnomerný dopyt. Nutným je mať priebežný prehľad o stave zásob. Preto sa používa pri dôležitých materiálových položkách, kde si podnik nemôže dovoliť deficit zásoby.

***P-systém riadenia zásob* –** zakladá sa na princípe, že vopred pevne stanovených objednávacích termínoch dĺžky t_k sa vystavujú objednávky nerovnakej veľkosti. Ide o systém s periodickým sledovaním stavu zásob. Veľkosť objednávky sa určí ako očakávaná spotreba za interval neistoty (t_p+ t_k) s prihliadnutím k veľkosti poistnej a dispozičnej zásoby - viď.

vzťah 2.

$$x = (t_p + t_k)\bar{p} + x_p - x_d \qquad (2)$$



Obrázok 2 P- systém riadenia zásob[6]

Kolísanie skutočnej zásoby okolo jej strednej hodnoty sa vyrovnáva veľkosťou jednotlivých objednávok. Systém nevyžaduje neustálu kontrolu stavu zásob, stačí periodická kontrola v intervaloch daných dĺžkou ***t_k*** – viď**.** Obrázok 2. Na rozdiel od Q-systému, kde vyššia spotreba je automaticky vyrovnávaná skrátením objednávacieho cyklu a poistná zásoba slúži na krytie vyššej spotreby počas intervalu obstarávania zásob, musí poistná zásoba v tomto prípade pokryť kolísanie spotreby počas celého intervalu neistoty.

P-systém riadenia zásob nachádza v praxi svoje uplatnenie v prípade, ak podnik nakupuje od jedného dodávateľa väčší počet položiek. Potom je výhodné z hľadiska objednávacích a dopravných nákladov agregovať všetky položky do jednej dodávky (množstevné zľavy, konsolidácia zásielky).

V praxi sa možno stretnúť s veľký počtom špecifických situácií, na ktoré reagovala teória zásob tvorbou rôznych modelov. Vo všeobecnosti ich možno rozdeliť podľa dvoch základných kritérií:

1. *Podľa spôsobu určenia dopytu (spotreby) a dĺžky obstarávacej lehoty rozlišujeme:*

    - *deterministické modely* – deklarujúce, že veľkosť dopytu (spotreby) ako aj dĺžka obstarávacej lehoty sú presne známe,

    - *stochastické modely* – vychádzajú z pravdepodobnostného charakteru dopytu (spotreby) a dĺžky obstarávacej lehoty,

    - *nederministické modely* – charakter dopytu (spotreby) a obstarávacej lehoty nie je známy.

Za najjednoduchšie možno považovať deterministické modely, ktoré predpokladajú rozhodovanie za istoty. Naproti tomu stochastické modely predpokladajú rozhodovanie za rizika. S nedeterministickými modelmi sa stretávame pri riešení nových neznámych problémov – sú pre ne typické viaceré možnosti riešenia, modelové experimenty a simulácie.

2. *Podľa spôsobu doplňovania zásob poznáme:*

    - *statické modely* – zásoba sa vytvára jednorázovou dodávkou,

    - *dynamické modely* – zásoba položky sa dlhodobo udržuje na sklade a doplňuje opakovanými dodávkami.

V praxi prevládajú prevažne dynamické modely riadenia zásob. So statickými modelmi sa možno stretnúť pri riešení špecifických problémov, napr. sezónny tovar *[6]*.

ZÁVER

Dosiahnuté úspory zásob v podniku bez zbytočných investícii, by mali byť inšpiráciou pre zamyslenie, či nejde o ten správny spôsob ako sa prepracovať k výraznej redukcii stavu zásob, a tým aj k rastu prosperity firmy. Metódy operačného výskumu, kam patrí aj teória zásob, nám môžu byť v tomto smere významne nápomocné.

LITERATURA

1. Červeňan, Š.–Vidová, H.–Hološová, H.: *Logistika v praxi manažéra.* Trnava: Tripsoft, 2003, s. 194, ISBN 80-968734-1-5

2. Hrablik Chovanová, H. *Metódy operačnej analýzy v manažérskom rozhodovaní.* In: Manažment v teórii a praxi. - Roč. 5, č. 3-4 (2009), s. 69-73, ISSN 1336-7137

3. Ivaničová, Z. - Brezina, I. - Pekár. J. *Operačný výskum*. Bratislava: Ekonómia, 2002, s. 287, ISBN 80-89047-43-2.

4. Koštriak, J.-Frolík, Z. a kol.: *Štíhly a inovativní podnik.* Praha: Alfa Publishing, s. r. o. 2006, s. 240, ISBN 80-86851-38-9

5. Saniuk S., Saniuk A., *Production orders planning in a network of small and medium-sized enterprises, Contemporary problems in managing production and services supporting manufacturing processes* / Ed. by J. Lewandowski, I. Jałmużna .- Łódź : Wydaw. Politechniki Łódzkiej, 2009 - (Monograph) - s. 31--38 .- ISBN: 978-83-7283-322-8

6. Sixta, J. – Žižka, M. *Logistika – používané metody*. Brno: Computer Press, a. s., 2009, s. 240, ISBN 978-80-251-2563-2.

7. Vidová, H.: *Progresívne metódy analýzy ukazovateľov logistiky*. In: Zborník z medzinárodnej konferencie Průmyslové inženýrství, Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni 2003,s. 222 – 226.ISBN 80-7043-242-X

8. Witkowski K. *Logistic Controlling within the Enterprise Strategy. In:* Management, 2009, Vol. 13, s. 47—59

9. www.ipaslovakia.sk

ODHAD ALTERNATÍVNYCH MIER EFEKTÍVNOSTI V DEA MODELOCH

ANDREA FURKOVÁ*)

Abstrakt

Data Envelopment Analysis represents relatively new approach for performance evaluation and efficiency improvement of production units. DEA is commonly used in performance evaluation and benchmarking analysis of various type production units. These type of units could be not only production units, which convert effective multiple inputs into effective multiple outputs but also schools, hospitals, bank branches etc., hence any homogeneous units. DEA is nonparametric benchmarking approach based on unit´s comparison with the best practice unit of the sample. The goal of this paper is to describe how we could calculate various efficiency measures using DEA. We discussed the basic constant returns to scale and variable returns to scale models from both the input and output orientations. The main objective was mentioning some popular extensions of these basic DEA models. The extensions we consider involve cost, allocative, profit and revenue efficiency.

Klíčová slova (keywords)

DEA, efektívnosť, efektívnosť tržieb, efektívnosť zisku, nákladová efektívnosť

ÚVOD

---

*)

Ing. Andrea Furková, PhD., Katedra operačného výskumu a ekonometrie, Fakulta hospodárskej informatiky, Ekonomická univerzita v Bratislave, Dolnozemská cesta 1/b, 852 35 Bratislava, tel. 02/67295832, e-mail: furkova@euba.sk

Význam modelov analýzy obalu dát (modely z anglického termínu Data Envelopment Analysis) ako nástroja na vyhodnocovanie a zlepšovanie výkonnosti výrobných firiem ale aj firiem poskytujúcich služby neustále rastie. Modely DEA sú široko využívané v analýze výkonnosti a benchmarkingu rôznych typov jednotiek (v literatúre označované ako DMU – Decision Making Unit) ako napríklad výrobné podniky, pobočky bánk, poisťovní, nemocnice atď. Analýza obalov dát bola priamo ovplyvnená literatúrou z oblasti produkčnej efektívnosti, ktorá vychádza z práce autorov Koopmansa [12], Debreua [5] a Shepharda [15]. Autori Debreu a Shephard navrhli funkciu vzdialenosti ako spôsob modelovania viac výstupovej technológie ako aj spôsob merania radiálnej vzdialenosti výrobcu od hranice a to výstupovo orietovanej (Debreu) alebo vstupovo orientovanej (Shephard). Spojenie funkcie vzdialenosti s technickou efektívnosťou bolo kľúčové vo vývoji merania efektívnosti. Farrell [8] ako prvý meral produkčnú efektívnosť empiricky. Vychádzajúc z prác Koopmansa a Debreua, Farrell ukázal ako definovať nákladovú efektívnosť a ako môže byť rozložená na jej technický a alokovaný komponent. Taktiež urobil empirickú aplikáciu amerického poľnohospodárstva s využitím techník lineárneho programovania (LP). Táto aplikácia inšpirovala viacerých autorov ako aj Charnesa, Coopera a Rhodesa [11], ktorí ako prví vo svojom článku použili termín analýza obalov dát, čím sa významne zaslúžili o rozvoj DEA modelov. DEA je teraz široko používanou neparametrickou metódou na meranie efektívnosti. Charnes, Cooper a Rhodes navrhli model, ktorý bol vstupovo orientovaný s predpokladom o konštantných výnosoch z rozsahu. Alternatívne DEA modely s variabilnými výnosmi z rozsahu môžeme nájsť v prácach Färea, Grosskopfa a Logana [7] a Bankera, Charnesa a Coopera [1]. Známy je aj aditívny model [10], model založený na sklzoch [16], stochastické DEA modely [14] a prístup FDH (Flexible Disposable Hull – FDH) [6].

V príspevku naformulujeme klasický vstupovo orientovaný a výstupovo orientovaný DEA model, a to: CCR model s predpokladom o konštantnosti výnosov z rozsahu a BCC model s predpokladom o premenlivých výnosoch z rozsahu. Za predpokladu, že máme údaje o cenách vstupov a výstupov a po stanovení strategického správania sa jednotiek resp. firiem sa zameriame na rozšírenie základného CCR a BCC modelu na meranie efektívnosti nákladovej, alokovanej, zisku, tržieb a budeme venovať pozornosť kvázi fixným vstupom v DEA modeloch.

1 TRADIČNÉ MODELY DEA

Základným predpokladom CCR modelu je predpoklad o konštantnosti výnosov z rozsahu (Constant Returns to Scale – CRS), t.j., že každá jednotka vstupu prináša rovnaké množstvo výstupov. Tento predpoklad je však vhodný iba vtedy, ak všetky sledované jednotky operujú v tzv. optimálnom rozsahu. Avšak existencia nedokonalej konkurencie, vládna regulácia atď. môžu spôsobiť, že jednotky neoperujú v optimálnom rozsahu. Banker, Charnes a Cooper [1] preto navrhli rozšírenie CCR modelu na prípad premenlivých výnosov z rozsahu (Variable Returns to Scale - VRS). Rozdiel medzi týmito dvoma modelmi je iba v množine prípustných riešení v úlohe LP. CCR model s konštantnými výnosmi z rozsahu môžeme ľahko modifikovať na BCC model s premenlivými výnosmi z rozsahu a to pridaním podmienky konvexnosti ($\mathbf{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda} = 1$) do modelu (1) naformulovaného v časti 1.1. V časti 1.2 budeme venovať pozornosť DEA modelu orientovanému na výstupy.

1. 1 VSTUPOVO ORIENTOVANÝ DEA MODEL – TECHNICKÁ EFEKTÍVNOSŤ

Predpokladajme, že existuje *N* hodnotených jednotiek, ktoré maximalizujú svoju efektívnosť. Ďalej predpokladáme, že máme k dispozícií údaje o *K* vstupoch a *M* výstupoch pre každú DMU. *i* – ta DMU je reprezentovaná vektormi $\mathbf{x}_i$ a $\mathbf{y}_i$. Matica $\mathbf{X}$ je matica vstupov rozmeru *K*x*N* a matica $\mathbf{Y}$ je matica výstupov rozmeru *M*x*N* a obsahujú údaje za všetkých *N* jednotiek. Vstupovo orientovaný DEA model (CCR model) s predpokladom o konštantnosti výnosov z rozsahu a radiálnou mierou vzdialenosti k efektívnej hranici môžeme naformulovať nasledujúco:

$\min_{\theta,\lambda} \theta$

$-\mathbf{y}_i + \mathbf{Y\lambda} \geq \mathbf{0}$

$\theta\mathbf{x}_i - \mathbf{X\lambda} \geq \mathbf{0}$
(1)

$\mathbf{\lambda} \geq \mathbf{0}$,

kde θ je skalár a λ je Nx1 vektor váh priradených jednotlivým jednotkám. Túto úlohu môžeme interpretovať nasledovne: minimalizujeme hodnotu θ, teda aj redukované množstvo vstupov $\theta\mathbf{x}_i$ tak, aby jednotka opísaná dvojicou ($\theta\mathbf{x}_i$, $\mathbf{y}_i$) patrila do množiny výrobných možností. Modelom sa snažíme nájsť virtuálnu jednotku charakterizovanú vstupmi $\mathbf{X\lambda}$ a výstupmi $\mathbf{Y\lambda}$, ktoré sú lineárnou kombináciou vstupov a výstupov ostatných sledovaných jednotiek a ktoré sú lepšie (alebo aspoň nie sú horšie) ako vstupy a výstupy hodnotenej DMU, tzn., že pre vstupy a výstupy virtuálnej jednotky musí platiť $\mathbf{X\lambda} \leq \mathbf{x}_i$ a $\mathbf{Y\lambda} \geq \mathbf{y}_i$. Ak virtuálna jednotka s takýmito vlastnosťami neexistuje, resp. virtuálna jednotka je totožná s hodnotenou jednotkou, tzn., že platí $\mathbf{X\lambda} = \mathbf{x}_i$ a $\mathbf{Y\lambda} = \mathbf{y}_i$. Hodnotená DMU bude teda efektívna, ak optimálna hodnota účelovej funkcie modelu (1) bude rovná jednej (hodnota θ bude predstavovať mieru technickej efektívnosti (TE_I) i-tej DMU). Hodnota jedna indikuje bod na efektívnej hranici a preto je príslušná DMU technicky efektívna podľa Farrellovej [8] definície efektívnosti a čím nižšia je hodnota θ, tým viac je DMU neefektívna v rámci uvažovaného súboru jednotiek. Táto hodnota ukazuje potrebu proporcionálneho zníženia vstupov tak, aby sa jednotka stala efektívnou. Výhodou DEA modelov nie je teda iba to, že umožňujú získať odhad miery efektívnosti pre sledované jednotky a na základe tejto miery jednotky usporiadať, ale poskytujú rozhodovateľovi aj informácie o tom, akým spôsobom by sa malo zlepšiť správanie DMU tak, aby sa stala efektívnou.

1.2 VÝSTUPOVO ORIENTOVANÝ DEA MODEL – TECHNICKÁ EFEKTÍVNOSŤ

V predchádzajúcom vstupovo orientovanom modeli sa pri identifikácií technickej neefektívnosti vychádzalo z proporcionálnej redukcie vstupov a predpokladali sme, že úroveň výstupu je fixná. Avšak je možné merať technickú neefektívnosť ako proporcionálny rast vo výstupe a za predpokladu, že úroveň vstupov je fixná. Vybrať orientáciu modelu je náročná úloha, rozhodnúť sa možno podľa premenných (vstupy alebo výstupy), ktoré manažéri dokážu viac ovplyvňovať. Výstupovo orientovaný DEA model s predpokladom o variabilných výnosoch z rozsahu a radiálnou mierou vzdialenosti k efektívnej hranici môžeme naformulovať nasledujúco:

$$\max_{\phi,\boldsymbol{\lambda}} \phi$$

$$-\phi\mathbf{q}_i + \mathbf{Q}\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{x}_i - \mathbf{X}\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda} = 1$$

(2)

$$\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$$

kde $1 \leq \phi \leq \infty$ a $\phi - 1$ je proporcionálny rast vo výstupov, ktorý môže dosiahnúť *i*-ta firma pri danej úrovni vstupov, matica **Q** je matica výstupov rozmeru *M*x*N* a obsahuje údaje za všetkých *N* jednotiek, ostatné premenné boli definované v predchádzajúcom modeli. Miera technickej efektívnosti (výstupovo orientovaná) sa môže pohybovať v intervale od 0 po 1 a vypočítame ju nasledujúco:

$$TE_O = 1/\phi$$

(3)

2 ROZŠÍRENIA TRADIČNÝCH DEA MODELOV

Populárnym rozšírením predchádzajúcich DEA modelov sú modely, ktoré nám umožňujú kvantifikovať nielen technickú efektívnosť ale aj nákladovú efektívnosť, alokovanú efektívnosť, efektívnosť zisku či efektívnosť tržieb. Na aplikáciu týchto modelov je nutná informácia o cenách vstupov alebo výstupov ako aj predpoklad o strategickom správaní sa DMU, ako je napr. minimalizácia nákladov, maximalizácia tržieb, maximalizácia zisku atď. Týmto modelom a ich modifikáciám sa budeme venovať v nasledujúcich častiach.

2.1 NÁKLADOVÁ A ALOKOVANÁ EFEKTÍNOSŤ V DEA MODELOCH

Ak predpokladáme, že hlavným zámerom firmy je minimalizácia nákladov, môžeme použiť vstupovo orientovaný DEA model popísaný v (1) na získanie technických efektívnosti a následne vyriešiť nasledujúci problém minimalizácie nákladov:

$$\min_{\boldsymbol{\lambda},\mathbf{x}_i^*} \mathbf{w}_i^{\mathbf{T}}\mathbf{x}_i^*$$

$$-\mathbf{y}_i + \mathbf{Y}\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{x}_i^* - \mathbf{X}\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{e}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\lambda} = 1$$

(4)

$$\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$$

kde $\mathbf{w}_i$ je Nx1 vektor cien vstupov pre i-tu DMU a $\mathbf{x}_i^*$ (vypočítané úlohou LP) je vektor vstupov i-tej DMU minimalizujúci náklady pri daných cenách vstupov $\mathbf{w}_i$ a daných výstupoch $\mathbf{y}_i$. Celková nákladová efektívnosť alebo ekonomická efektívnosť i-tej DMU môže byť vypočítaná ako:

$CE = \mathbf{w}_i^{\mathbf{T}} \mathbf{x}_i^* / \mathbf{w}_i^{\mathbf{T}} \mathbf{x}_i$
(5)

čo je pomer minimálnych nákladov k nákladom skutočným. Nákladovú efektívnosť získanú z rovnice (5) môžeme následne použiť aj na výpočet alokovanej efektívnosti a to nasledujúco:

$AE=CE/TE$
(6)

2.2 EFEKTÍVNOSŤ TRŽIEB

Ak predpokladáme, že firma maximalizuje tržby a máme k dispozícií miery technickej efektívnosti vypočítané výstupovo orientovaným modelom definovaným v (2), potom môžeme DEA model maximalizujúci tržby zapísať nasledujúco:

$\max_{\lambda, y_i^*,} \mathbf{p}_i^{\mathbf{T}} \mathbf{q}_i^*$

$-\mathbf{q}_i^* + \mathbf{Q}\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$

$\mathbf{x}_i - \mathbf{X}\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$

$\mathbf{e}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\lambda} = 1$
(7)

$\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$

kde $\mathbf{p}_i$ je vektor cien vstupov rozmeru *M*x1 pre *i*-tu firmu a $\mathbf{q}_i^*$ (je vypočítané úlohou LP) je vektor výstupov maximalizujúci tržby *i*-tej firmy pri stanovených cenách $\mathbf{p}_i$ a pri úrovni vstupov $\mathbf{x}_i$. Celková efektívnosť tržieb (*RE*) *i*-tej firmy je vypočítaná ako podiel skutočných hodnôt tržieb k tržbám maximálnym:

$RE = \mathbf{p}_i^{\mathbf{T}} \mathbf{q}_i / \mathbf{p}_i^{\mathbf{T}} \mathbf{q}_i^*$
(8)

Miera alokovanej efektívnosti je potom vypočítaná nasledovne:

AE=RE/TE.
(9)

Miery *TE*, *AE* a *RE* môžu nadobúdať hodnoty od 0 po 1, kde hodnota 1 indikuje plne efektívnu jednotku.

2.3 EFEKTÍVNOSŤ ZISKU

Ak máme k dispozícií informácie o cenách vstupov ako aj o cenách výstupov môžeme taktiež vypočítať efektívnosť zisku pomocou DEA metodológie. DEA model maximalizujúci zisk môžeme špecifikovať nasledujúco:

$$\max_{\boldsymbol{\lambda}, y_i^*, x_i^*} \left(\mathbf{p}_i^{\mathbf{T}} \mathbf{q}_i^* - \mathbf{w}_i^{\mathbf{T}} \mathbf{x}_i^* \right)$$

$$-\mathbf{q}_i^* + \mathbf{Q}\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{x}_i^* - \mathbf{X}\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{e}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\lambda} = 1$$

(10)

$$\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$$

kde všetky označenia boli definované rovnako ako v predchádzajúcom modeli. Ak získame zisk maximalizujúci bod pre každú firmu $\left(\mathbf{q}_i^*, \mathbf{x}_i^*\right)$, môžeme špecifikovať ziskovú efektívnosť (*PE*) ako pomer skutočných hodnôt zisku k maximálnemu zisku:

$$PE = \left(\mathbf{p}_i^{\mathbf{T}} \mathbf{q}_i - \mathbf{w}_i^{\mathbf{T}} \mathbf{x}_i \right) / \left(\mathbf{p}_i^{\mathbf{T}} \mathbf{q}_i^* - \mathbf{w}_i^{\mathbf{T}} \mathbf{x}_i^* \right)$$

(11)

Avšak táto hodnota nemusí byť ohraničená hodnotami 0 a 1, môže byť aj negatívna, ak zisk dosahuje záporné hodnoty alebo môže byť nedefinovateľná, ak maximálna hodnota zisku je 0.

2.4 KVÁZI FIXNÉ VSTUPY A EFEKTÍVNOSŤ V KRÁTKODOBOM HORIZONTE

V predchádzajúcich modeloch sme predpokladali, že vstupy sú premenlivé a firma ich môže meniť za účelom dosiahnutia efektívnosti. Toto platí pri modeloch, ktoré merajú technickú vstupovo orientovanú, nákladovú a ziskovú efektívnosť, ak uvažujeme dlhodobý rozhodovací horizont. Je však možné, že jeden alebo viac vstupov sú kvázi fixné a iba niektoré vstupy sú variabilné. Je potrebné modifikovať spomínané miery efektívnosti a explicitne vziať do úvahy kvázi fixné vstupy.

Predpokladajme, že vektor vstupov **x** môže byť rozdelený nasledujúco: $\mathbf{x} = \{\mathbf{v}, \mathbf{K}\}$, kde **v** je vektor variabilných vstupov a **K** je vektor kvázi fixných vstupov. Potom vstupovo orientovaná miera technickej efektívnosti firmy pri použití vstupov $\mathbf{v^0}$ a $\mathbf{K^0}$ na vyprodukovanie výstupu $\mathbf{y^0}$ je:

$$\tau_v = \min \theta_v : \left(\theta_v, \mathbf{v^0}, \mathbf{K^0}, \mathbf{y^0}\right) \in V$$

kde *V* je množina požiadaviek na vstupy. Modifikovaný model DEA na meranie vstupovo orientovanej technickej efektívnosti v krátkodobom horizonte je:

$$\tau_v = \min_{\theta_v, \boldsymbol{\lambda}} \theta_v$$

$$-\mathbf{y}^0 + \mathbf{Y}\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$$

$$-\theta \mathbf{v^0} - \mathbf{v}\boldsymbol{\lambda} \leq \mathbf{0}$$

$$-\mathbf{K^0} - \mathbf{K}\boldsymbol{\lambda} \leq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{e^T}\boldsymbol{\lambda} = 1$$

(12)

$$\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$$

Môžeme si všimnúť, že θ_v je aplikovaná iba na variabilné vstupy a nie na vstupy kvázi fixné.

Uvažujme teraz o nákladovej efektívnosti v krátkodobom horizonte. Predpokladajme, že vektor cien vstupov pre variabilné vstupy je **q** a vektor cien vstupov pre fixné vstupy je **r**. Skutočné variabilné náklady firmy sú $VC^0 = \mathbf{q}^\mathbf{T}\mathbf{v}^\mathbf{0}$ a fixné náklady sú $FC^0 = \mathbf{r}^\mathbf{T}\mathbf{K}^\mathbf{0}$. Môžeme si všimnúť, že fixné náklady sú konštantou v krátkodobom období a nemajú vplyv na náklady minimálne. Preto vhodným kritériom v tomto prípade je minimalizácia nákladov variabilných. Minimálne náklady firmy môžeme vyjadriť nasledujúco:

$$VC\left(q, y, K^0\right) = \min \mathbf{q}^\mathbf{T}\mathbf{v} : \left(v, K^0, y^0\right) \in V$$
(13)

Modifikovaný DEA model na meranie nákladovej efektívnosti zapíšeme nasledujúco:

$$VC^0 = \min_{q,y,K^0} \mathbf{q}^\mathbf{T}\mathbf{v}$$

$$-\mathbf{y}^0 + \mathbf{Y}\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$$

$$-\mathbf{v}^\mathbf{0} + \mathbf{v}\boldsymbol{\lambda} \leq \mathbf{0}$$

$$-\mathbf{K}^\mathbf{0} - \mathbf{K}\boldsymbol{\lambda} \leq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{e}^\mathbf{T}\boldsymbol{\lambda} = 1$$
(14)

$$\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$$

Variabilná nákladová efektívnosť *i*-tej DMU môže byť vypočítaná ako pomer:

$$CE_v = VC^* / VC^0$$
(15)

Ďalej uvažujme problém maximalizácie zisku firmy v krátkodobom období. V tomto období firma môže maximalizovať iba svoj „variabilný zisk“, t.j. rozdiel medzi celkovými príjmami a variabilnými nákladmi. Tento zisk môže byť vyjadrený nasledujúco:

$$\pi_v^0 = \mathbf{p}^{\mathbf{T}}\mathbf{y}^{\mathbf{0}} - \mathbf{q}^{\mathbf{T}}\mathbf{v}^{\mathbf{0}}$$
(16)

Maximálny zisk je potom:

$$\pi_v\left(p, q, K^0\right) = \max \mathbf{p}^{\mathbf{T}}\mathbf{y} - \mathbf{q}^{\mathbf{T}}\mathbf{v} : \left(q, K^0, y\right) \in V$$
(17)

Modifikovaný DEA model na meranie ziskovej (variabilnej) efektívnosti zapíšeme nasledujúco:

$$\pi_v = \max_{p,q,K^0} \left(\mathbf{p}^{\mathbf{T}}\mathbf{y} - \mathbf{q}^{\mathbf{T}}\mathbf{v}\right)$$

$$-\mathbf{y}^0 + \mathbf{Y}\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$$

$$-\mathbf{v}^{\mathbf{0}} + \mathbf{v}\boldsymbol{\lambda} \leq \mathbf{0}$$

$$-\mathbf{K}^{\mathbf{0}} - \mathbf{K}\boldsymbol{\lambda} \leq \mathbf{0}$$
$$\mathbf{e}^T\boldsymbol{\lambda} = 1$$
(18)

$$\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$$

Variabilná zisková efektívnosť *i*-tej DMU môže byť vypočítaná ako pomer:

$$PE_v = \pi^0 / \pi^*$$
(19)

ZÁVER

DEA modely sú užitočným nástrojom na identifikáciu efektívnych a neefektívnych jednotiek, poskytujú numerickú hodnotu miery efektívnosti, ktorá poskytuje informácie o tom, akým spôsobom by sa malo zlepšiť správanie jednotiek (firiem) tak, aby sa stali efektívne. V príspevku sme na teoretickej úrovni prezentovali klasické DEA modely CCR a BCC orientované na vstupy a taktiež na výstupy. Keďže tieto modely umožňujú odhad efektívnosti technickej zamerali sme na rozšírenia týchto DEA modelov, ktoré nám umožňujú kvantifikovať efektívnosť nákladovú, alokovanú efektívnosť, efektívnosť zisku či efektívnosť tržieb. Na aplikáciu týchto modelov bola nutná informácia o cenách vstupov alebo výstupov ako aj stanovenie predpokladu o strategickom správaní sa DMU, ako je napr. minimalizácia nákladov, maximalizácia tržieb, maximalizácia zisku atď.

LITERATÚRA

[1] BANKER, R. D., CHARNES, A., COOPER, W. W.: *Some Models for Estimating Technical and Scale Inefficiencies in Data Envelopment Analysis,* Management Science, 1984, 30, 1078 - 1092.

[2] COELLI, T. J., RAO PRASADA, D., **O'DONNELL,** C.J., BATTESE, G.: *An Introduction to Efficiency and Productivity Analysis*, Kluwer Academic Publishers, 2005, ISBN: 978-0-387-24265-1

[3] COOPER, W. W., SEIFORD, L. M., TONE, K. : *Data Envelopment Analysis*, Kluwer Academic publisher, 2000, ISBN 0-7923-8693-0

[4] DAS, A., NAG, A., RAY, C. S.: *Liberalization, Ownership, and Efficiency in Indian Nankiny: A Nonparametric Approach*,

University of Connecticut, Department of Economics Working Paper Series, 2004, Working Paper 2004-29.

[5] DEBREU, G.: *The Coefficient of Resource Utilization*, Econometrica 19(3), 1951, s. 273 - 292.

[6] DEPRINS, D., SIMAR, L., TULKENS, H.: *Measuring Labour-Efficiency in Post Offices, The Performance of Public Enterprises, Concepts and Measurements*, 1984, North Holand.

[7] FÄRE, R., GROSSKOPF, S, LOGAN, J.: *The Relative Efficiency of Illinois Electric Utilities*, Resources and Energy, 5, 1983, 349 - 367.

[8] FARRELL, M. J.: *The Measurement of Productive Efficiency*. Journal of the Royal Statistical Society Series A CXX, 253- 281, 1957.

[9] FURKOVÁ, A.: *Analýza nákladovej efektívnosti slovenských a českých distribučných podnikov elektrickej energie*, dizertačná práca, Fakulta hospodárskej informatiky, 2007, Ekonomická univerzita v Bratislave.

[10] CHARNES, A., COOPER, W. W., GOLANY, B., SEIFORD, L., STUTZ, J.: *Foundations of Data Envelopment Analysis for Pareto-Koopmans Efficient Empirical Production Functions*, Journal of Econometrics, 30, 1985, 91 - 107.

[11] CHARNES, A., COOPER, W. W., RHODES, E.: *Measuring Efficiency of Decision Making Units*, European Journal of Operation Research, 2, 1978, s. 429 - 444.

[12] KOOPMANS, T. C.: *An Analysis of Production as an Efficient Combination of Activities, Activity of Production and Allocation* Number 13, New York, 1951, Wiley.

[13] KUMBHAKAR, S. C., LOVELL, C. A. K.: *Stochastic Frontier Analysis*, Cambridge University Press, 2003, ISBN 0-521-481848

[14] OLSEN, O. B., PETERSEN, N. C.: *Chance Constrained Efficiency Evaluation*, Management Science, 41, 1995, 442 - 457.

[15] SHEPHARD, R. W.: *Cost and Production Functions*, 1953, PrincPeton University Press.

[16] TONE, K.: *A Slack - based Measure of Efficiency in Data Envelopment Analysis*, European Journal of Operational Research, 2001 (130), č. 3, 2001, s. 498 - 509.

POROVNÁNÍ INVESTIČNÍCH INSTRUMRNTŮ – VÍCEKRITERIÁLNÍ ROZHODOVÁNÍ

PETR MYNAŘÍK

Abstrakt:

Článek porovnává základní investiční nástroje pro potřeby řešení penze. K porovnávání a analýze autor využívá vybrané metody vícekriteriálního rozhodování a snaží se zdůvodnit a okomentovat dosažené výsledky. Na závěr analýzy se z dílčích řešení vytvoří celkové pořadí, kde se zohlední a agregují pořadí variant dle všech použitých metod.

Klíčová slova (keywords):

Finance, investiční produkty, penze, vícekriteriální hodnocení variant,

ÚVOD

V tomto příspěvku se zaměřím na analýzu problematiky možného řešení zajištění penze, k čemuž použiji metody vícekriteriálního hodnocení variant (VHV). Chtěl bych čtenářům přiblížit možné varianty řešení této záležitosti a nastínit vhodný výběr produktů.

Cílem této kapitoly je zjistit, jaká kombinace produktů je správná při řešení otázky důchodů. Pro správnou analýzu této problematiky jsem si zvolil jako varianty nejznámější a nejpoužívanější investiční produkty na českém trhu. Do řešení jsem zahrnul všechny produkty, které lze využít jako vhodný instrument pro naspoření finančních prostředků pro řešení penze.

Na toto zadání aplikuji vybrané metody vícekriteriálního hodnocení variant (VHV) a získané výsledky se budu snažit okomentovat a zdůvodnit.

1 POPIS ŘEŠENÉHO PROBLÉMU

Zásadním rozhodnutím bylo zvolit varianty, které budeme porovnávat, a také kritéria, podle nichž budeme hodnotit a porovnávat. Za varianty jsem vybral pět základních instrumentů, které se na českém trhu nabízí jako možné řešení otázky důchodů. K těmto pěti produktům jsem dodatečně přidal ještě jednu možnost, a to *spořící účet*.

Tento produkt za poslední rok získal na oblíbenosti a je zájemci hojně využíván. Bylo to dáno hlavně zajímavou nabídkou různých společností. Pro mnoho lidí byl tento druh účtu atraktivní převážně kvůli zajímavému zhodnocení a jednoduchému založení a správě.

1.1 ZVOLENÉ VARIANTY A KRITÉRIA

Mezi hodnocené produkty jsem zařadil tyto: *penzijní připojištění, investiční životní pojištění, kapitálové životní pojištění, investice, spořící účet a stavební spoření*.

Dále bylo nutné zvolit taková kritéria, která by popisovala a charakterizovala významné parametry jednotlivých produktů. Nakonec jsem se rozhodl pro devět kritérií:

- *zhodnocení* – představuje očekávanou a předpokládanou úrokovou míru, kterou budou zhodnocovány vložené prostředky
- *očekávaný výnos* – částka, kterou za očekávaného vývoje budeme mít na konci spoření
- *státní příspěvek* – zda je možné, aby přispíval nejen účastník, ale i stát
- *daňová uznatelnost* – můžeme-li si nárokovat daňové odpočty

- *zdanění výnosu* – zda podléhá výnos zdanění
- *možné riziko* – srovnání možného rizika u daného produktu
- *likvidita* – jednoduchost nakládání a dostupnost vloženého kapitálu
- *předčasné ukončení* – jak snadno lze okamžitě zrušit smlouvu a disponovat se zůstatkem
- *garantovaný výnos* – máme-li již na počátku garantovanou částku, která nám bude vyplacena na konci programu

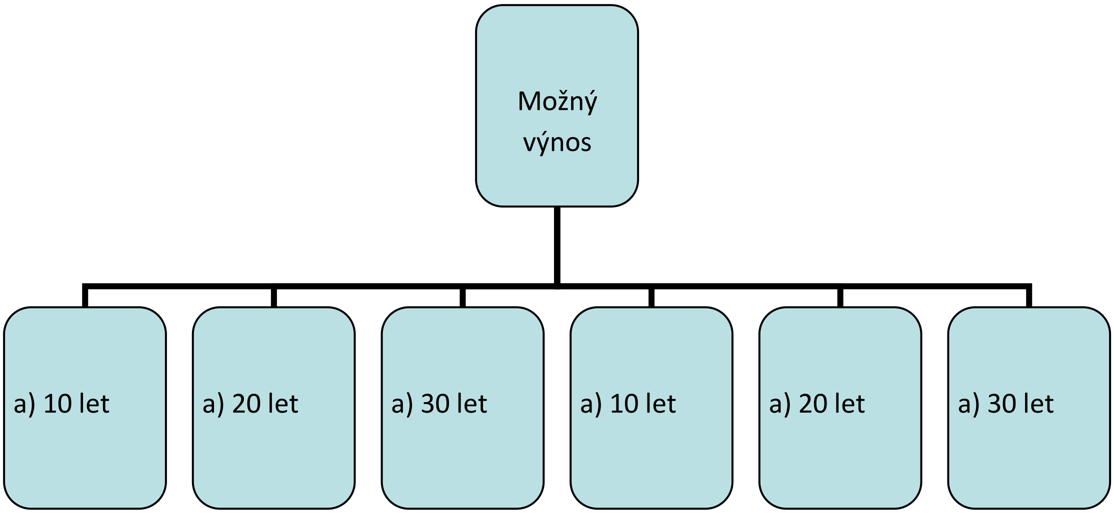
Po definování porovnávaných variant a kritérií jsem mohl začít sestavovat kriteriální matici. Data jsem získal na základě vlastních znalostí jednotlivých produktů, příp. z internetu.

Tabulka č. 1 – neúplná základní data

	zhodn. %	možný výnos	státní přísp.	daňová uznateln.	zdanění výnosu	možné riziko (1-5)	likvidita (1-5)	předč. ukončení (1-5)	garant. výnos
PP	3,5		ANO	ANO	15%	1	1	1	NE
IŽP	6		NE	ANO	15%	3	1	2	NE
KŽP	2,4		NE	ANO	15%	2	1	2	ANO
investice	7		NE	NE	0%	4	2	3	NE
spoř. účet	3		NE	NE	15%	1	3	4	NE
stavební spoření	2		ANO	NE	0%	1	2	5	NE
typ kritéria	max	max	max	max	min	min	max	max	max

Tato tabulka představuje kriteriální matici. Jak je vidět, nejsou vyplněny hodnoty u kritéria *možný výnos*, a to z jednoho prostého důvodu. Je obecně známo, že výběr vhodných produktů závisí na **délce časového horizontu** a na **výši měsíční úložky**, a proto i tento problém rozdělíme na více dílčích problémů, které je možné řešit zvlášť.

Tabulka č. 2 – rozdělení na dílčí problémy



Z grafu lze vyčíst, že jsem rozdělil časový horizont na tři vlny – 10 let, 20 let a 30 let. Výši investované měsíční částky budu uvažovat 2 000 Kč a 4 000 Kč. Takto dostaneme šest různých možností, které je možné porovnávat dle zvolených metod vícekriteriálního hodnocení variant. Já nebudu analyzovat všech šest dílčích úloh, ale zaměřím se pouze na dvě krajní situace. V prvním případě budu uvažovat desetiletý interval a měsíční úložku ve výši 2 000 Kč, ve druhém případě budu brát v úvahu třicetiletý interval a měsíční vklad 4 000 Kč.

Po tomto rozhodnutí jsem díky využití kalkulátorů pro jednotlivé produkty mohl vypočítat hodnoty *možného výnosu*, a tím zkompletovat kriteriální matici. Konečná podoba kriteriálních matic je znázorněná v tabulkách č. 3 a 4.

Tabulka č. 3 – kriteriální matice 1 - měsíční úložka 2 000 Kč, časový horizont 10 let

	zhodn. %	možný výnos	státní přísp.	daňová uznateln.	zdanění výnosu	možné riziko (1-5)	likvidita (1-5)	předč. ukončení (1-5)	garant. výnos
PP	3,5	307 000	ANO	ANO	15%	1	1	1	NE
IŽP	6	223 000	NE	ANO	15%	3	1	2	NE
KŽP	2,4	186 000	NE	ANO	15%	2	1	2	ANO
investice	7	355 000	NE	NE	0%	4	2	3	NE
spoř. účet	3	277 000	NE	NE	15%	1	3	4	NE
stavební spoření	2	299 000	ANO	NE	0%	1	2	5	NE
typ kritéria	max	max	max	max	min	min	max	max	max

Tabulka č. 4 – kriteriální matice 2 - měsíční úložka 4 000 Kč, časový horizont 30 let

	zhodn. %	možný výnos	státní přísp.	daňová uznateln.	zdanění výnosu	možné riziko (1-5)	likvidita (1-5)	předč. ukončení (1-5)	garant. výnos
PP	3,5	2 625 000	ANO	ANO	15%	1	1	1	NE
IŽP	6	4 054 000	NE	ANO	15%	3	1	2	NE
KŽP	2,4	1 978 000	NE	ANO	15%	2	1	2	ANO
investice	7	4 852 000	NE	NE	0%	4	2	3	NE
spoř. účet	3	2 197 000	NE	NE	15%	1	3	4	NE
stavební spoření	2	2 098 000	ANO	NE	0%	1	2	5	NE
typ kritéria	max	max	max	max	min	min	max	max	max

1.2 VÁHOVÝ VEKTOR

Důležitá otázka se týkala určení váhového vektoru, což jsem nechtěl ponechat pouze na mé osobě, jelikož by to bylo příliš subjektivní. Proto jsem se rozhodl využít menšího šetření a na základě malého dotazníku jsem se zeptal skupiny respondentů. Na základě takto získaných výsledků jsem byl schopen nastavit váhový vektor. Vzorek respondentů se skládal ze 45 osob, z toho bylo dotázáno 25 mužů a 20 žen. Uznávám, že vzorek je relativně malý, ale přesto jsou výsledky i z tohoto malého vzorku hodnotnější, než kdybych měl váhový vektor nastavovat pouze na základě vlastních pocitů.

Respondenti měli k dispozici 100 bodů a jejich úkolem bylo rozdělit tuto konstantní sumu mezi jednotlivé varianty. Čím významnější kritérium, tím více dostalo bodů. Mojí podmínkou bylo, aby všechna kritéria dostala nejméně 1 bod.

Výsledný vektor je znázorněn v následující tabulce.

Tabulka č. 5 – váhový vektor

	zhodn. %	možný výnos	státní přísp.	daňová uznateln.	zdanění výnosu	možné riziko (1-5)	likvidita (1-5)	předč. ukončení (1-5)	garant. výnos
Muži	10,00%	48,40%	6,00%	2,50%	4,00%	16,00%	5,20%	5,00%	2,80%
Ženy	7,60%	36,80%	7,80%	1,80%	1,80%	27,60%	4,50%	7,30%	5,70%
Celkem	**9,00%**	**43,00%**	**7,00%**	**2,00%**	**3,00%**	**21,00%**	**5,00%**	**6,00%**	**4,00%**

Po vypočítání váhového vektoru jsem měl k dispozici již všechna potřebná data a mohl jsem začít s analýzou.

2 APLIKACE METOD VÍCEKRITERIÁLNÍHO HODNOCENÍ VARIANT

Pro porovnání jednotlivých variant v mé diplomové práci jsem si vybral tři metody: metoda váženého součtu WSA, metoda TOPSIS a metoda ELECTRE III. Tyto metody pracují s kardinální informací, ale každá z metod je založena na odlišném principu. Více o zvolených metodách lze zjistit v uvedené literatuře [1].

Před samotnou aplikací zvolených metod vícekriteriálního hodnocení variant bylo potřeba provést test nedominovanosti. K tomuto testu jsem využil program SANNA. Tímto testem lze předem vyloučit některé z variant, v mém případě nedošlo k vyloučení žádné varianty. Nyní jsem již mohl použít vybrané metody a aplikovat je na obě zadání.

2.1 METODA WSA

Principem metody váženého součtu WSA je maximalizace užitku. Metoda spočívá na výpočtu užitku *u(ai)*, který přinesou varianty rozhodovateli. Pochopitelně platí, že čím vyšší je hodnota užitku, tím je pro rozhodovatele lepší. Jako nejlepší varianta je vybrána ta, která má nejvyšší hodnotu užitku.

Tento výpočtový postup jsem aplikoval na oba příklady a na následujících řádcích se budu snažit znázornit konečný výsledek.

Tabulka č. 6 – výsledek při aplikaci metody WSA

	1. příklad		2. příklad	
pořadí	produkt	u(ai)	produkt	u(ai)
1.	st. spoření	0,6625	investice	0,615
2.	PP	0,6349	IŽP	0,5076
3.	investice	0,595	PP	0,4238
4.	spoř. účet	0,5695	st. spoření	0,393
5.	IŽP	0,2911	spoř. účet	0,3708
6.	KŽP	0,1722	KŽP	0,1672

Připomenu, že první příklad představuje zadání: 10 let investování, 2 000 Kč měsíčně. A druhý příklad je: 30 let investování, 4 000 Kč měsíčně

Z výsledného pořadí je zřejmé, že délka časového intervalu a výše vkladu má podstatný vliv na výběr produktu. Pro obě zadání jsme dostali zcela odlišné pořadí jednotlivých variant. Jedinou jistotou je produkt Kapitálové životní pojištění (KŽP), který se v obou příkladech objevuje shodně na šestém místě.

2.2 METODA TOPSIS

Metoda TOPSIS také pracuje s kardinální informací a stojí na principu minimální vzdálenosti od ideální varianty. U této metody výpočet začíná normalizováním kriteriální matice a poté se vypočítá normalizovaná vážená matice. V této matici se stanoví ideální a bazální varianty a následně se počítá relativní vzdálenost od bazální varianty *ci*. Podle hodnot ukazatele *ci* následně získáme uspořádání jednotlivých variant. Čím je hodnota *ci* vyšší, tím je varianta lepší pro rozhodovatele.

Následující tabulka nám představí celkové pořadí po aplikaci této metody.

Tabulka č. 7 – výsledek při aplikaci metody TOPSIS

	1. příklad		2. příklad	
pořadí	produkt	c_i	produkt	c_i
1.	PP	0,6763	IŽP	0,5624
2.	st. spoření	0,6738	investice	0,5603
3.	spoř. účet	0,5906	PP	0,482
4.	investice	0,4711	st. spoření	0,4341
5.	IŽP	0,3602	spoř. účet	0,4151
6.	KŽP	0,3323	KŽP	0,2751

I u metody TOPSIS jsou na první pohled patrné rozdíly v uspořádání variant v 1. nebo 2. příkladě. Opět je jednoznačně nejslabší variantou Kapitálové životní pojištění. Dosavadní výsledky potvrzují předpoklad, že volba konkrétních produktů je závislá na výši pravidelné úložky a investičním horizontu (doba spoření).

2.3 METODA ELECTRE III.

Třetí z použitých metod je metoda ELECTRE III. Tento postup funguje na principu vyhodnocování podle preferenční relace. Postupně se porovnávají všechny dvojice variant mezi sebou podle jednotlivých kritérií.

Na začátku sestavíme matici S, jejíž hodnoty získáme jako součty vah u kritérií, kdy je varianta i lepší než varianta j. Následuje postupné hledání nejlepších variant.

Tabulka č. 8 – výsledek při aplikaci metody ELECTRE III.

	1. příklad	2. příklad
pořadí	produkt	produkt
1.	st. spoření	spoř. účet
2.	spoř. účet	PP
3.	PP	investice
4.	investice	IŽP
5.	IŽP	st. spoření
6.	KŽP	KŽP

Podíváme-li se na výsledky u obou příkladů, vidíme, že použitím této metody jsme získali nejméně rozdílné výsledky v porovnání s předcházejícími metodami. Jediný produkt, který dosáhl diametrálně odlišných výsledků, bylo stavební spoření. V ostatních případech zůstalo pořadí relativně neměnné.

3 CELKOVÉ POŘADÍ VARIANT

Na závěr jsem se snažil vytvořil celkové pořadí variant. Agregoval jsem pořadí u jednotlivých metod do jediné tabulky a podle součtu všech pořadí jsem sestavil pořadí produktů podle všech variant. Logicky jako nejlepší varianta je zvolena ta, která má nejmenší hodnotu celkového součtu pořadí.

Tabulka č. 9 – celkové pořadí 1.příkladu

pořadí	produkt	WSA	TOPSIS	ELECTRE III	CELKEM
1.	st. spoření	1	2	1	4
2.	PP	2	1	3	6
3.	spoř. účet	4	3	2	9
4.	investice	3	4	4	10
5.	IŽP	5	5	5	15
6.	KŽP	6	6	6	18

Tabulka č. 10 – celkové pořadí 2.příkladu

pořadí	produkt	WSA	TOPSIS	ELECTRE III	CELKEM
1.	investice	1	2	2	5
2.	IŽP	2	1	4	7
3.	PP	3	3	3	9
4.	spoř. účet	5	5	1	11
5.	st. spoření	4	4	5	13
6.	KŽP	6	6	6	18

Tento výsledek pouze potvrdil názor, že na výběr nejlepšího řešení má zásadní význam délka časového období a výše měsíční úložky. Při ukázkovém řešení dvou rozdílných příkladů jsme získali úplně rozdílné výsledky. Z toho vyplývá, že nabízené řešení je ryze subjektivní a je velmi důležité správně zanalyzovat potřeby a požadavky. Právě správné pochopení problému a správné zadání je základním předpokladem pro nalezení nejlepšího řešení.

Jedinou jistotou byl produkt Kapitálové životní pojištění, který byl u všech metod vyhodnocen jako nejméně vhodný. Přitom je právě tento instrument velice oblíbený a často využívaný na českém trhu. Můj vzorek respondentů si zvolil takové pořadí kritérií, podle kterých tato varianta dopadla jednoznačně nejhůře.

LITERATURA

1. Fiala P. *Modely a metody rozhodování*. Oeconomica Praha, 2003. ISBN 80-245-0622-X.

MĚŘENÍ INFLACE— BANALITA NEBO POKUS O PERPETUUMMOBILE?

BOHUMIL MINAŘÍK *)

Abstrakt

Tento příspěvek se zabývá několika souhrnnými cenovými indexy konstruovanými jako vážené geometrické průměry individuálních cenových indexů s vahami, které různým způsobem reflektují potřebu kombinovat váhy základního a srovnávaného období.

Klíčová slova (keywords)

Inflace, souhrnný cenový index, geometrický průměr, Laspeyresův index, Paascheův index, Fisherův index, Toernquistův index, Lipověckého index, Fisherovy axiomy

ÚVOD

Inflaci můžeme charakterizovat jako systematický všeobecný růst cenové hladiny v ekonomice**). Vedle mnoha dalších indexů se inflace typicky měří *indexem spotřebitelských cen*. Index spotřebitelských cen porovnává ceny vybraných výrobků a služeb, které jsou váženy podle svého podílu na celkové spotřebě domácnosti (spotřební koš). Tzv. *míra inflace* vznikne porovnáním hodnoty tohoto indexu v různých časových obdobích.

Nejnovější metodická příručka ČSÚ pro 3. čtvrtletí roku 2010 [1] popisuje na více než 30 stranách podrobně způsob výpočtu indexu spotřebitelských cen podle harmonizačních požadavků *Eurostatu*.

---

*) B. Minařík, Prof. Ing. CSc, Vysoká škola polytechnická v Jihlavě, minarik@vspj.cz

**) http://www.penize.cz/80335-co-je-inflace

Poslední revize indexu byla provedena v roce 2007***). Telegraficky uvedeme jen základní údaje pro Českou republiku a rok 2010:

- 714 tzv. *cenových reprezentantů*, tj. počet sledovaných položek zboží a služeb, vybraných záměrným výběrem,

- neuvedený počet *respondentů*, tj. míst, kde dochází k nákupu zboží a služeb spotřebiteli z řad domácností, ve 35 vybraných okresech všech krajů ČR a Hlavním městě Praze,

- celkový počet měsíčně zjišťovaných cen je cca 55 000,

- 12 hlavních oddílů *spotřebního koše* domácností (např. potraviny a nealkoholické nápoje, alkoholické nápoje a tabák, odívání a o-buv, ….).

Použitým indexem je *Laspeyresův souhrnný cenový index ve tvaru váženého aritmetického průměru**)*

$$I = \frac{\sum \frac{p_1}{p_0} * p_0 q_0}{\sum p_0 q_0} * 100$$

I……. index za sledované období k základnímu období (bazický index),
p_1…... cena zboží (služby) ve sledovaném (běžném) období,
p_0……cena zboží (služby) v základním období,
$p_0.q_0$ .. stálá váha — výdaje domácností za zboží (službu) v základním období.

***) Podle Nařízení komise (ES) č. 1334/2007 z 14.11.2007, kterým se mění nařízení (ES) č. 1749/96, kterým se stanoví počáteční prováděcí opatření k nařízení Rady (ES) č. 2494/95 o harmonizovaných indexech spotřebitelských cen (Úř. věst. L 296, 15.11.2007, s. 22–26).

*) Index je bez úprav převzat z [1], skutečný vzorec je ovšem jiný.

Rozhodující část citované příručky [1] tvoří pak podrobný popis kvalitativního a kvantitativního očišťování, přepočtů, výpočtů dílčích indexů a subindexů a také celé řady různých publikačních forem míry inflace.

Těmito problémy se nehodláme zabývat, i když z uvedeného je zřejmé, že existuje celá řada možných zdrojů zkreslení indexu spotřebitelných cen (v první řadě ovšem neúplné zjišťování *reprezentantů* i *res-pondentů*). Smyslem tohoto příspěvku je ovšem zabývat se konstrukcí samotného souhrnného cenového indexu spotřebitelských cen.

Povšimneme si především toho, že zatímco cenové změny se týkají běžného období, použité stálé váhy pocházejí ze základního období. Použití běžných vah, které by vedlo k *Paascheově souhrnnému cenovému indexu ve tvaru váženého harmonického průměru*, není snadné z prak-tických důvodů (je obtížné zjistit v reálném čase aktuální váhy). Ani použití aktuálních vah by ovšem problém nevyřešilo bezezbytku. Mezi základním a běžným obdobím leží určitý časový interval nenulové délky. Zdá se tedy logické, aby se na hodnotě souhrnného cenového indexu podílely v určitém poměru obě váhy — *váha základního období* i *váha běžného období*. Vyřešení tohoto problému by nepochybně vedlo k pre-cizaci konstrukce souhrnného cenového indexu a zvýšení jeho vypo-vídací schopnosti. Lze tedy tento problém uspokojivě vyřešit?

1 TVARY CENOVÝCH INDEXŮ A PROBLEMATIKA VAH

Elegentním řešením problému byl svého času „trik“ *Irvinga Fishera*, spočí-vající v zavedení „ideálního“ indexu jako geometrického průměru *Las-peyresova* a *Paascheova* souhrnného cenového indexu. Toto „zkusmé“ (a všeobecně známé) řešení ponecháváme stranou, i když je řadou pozděj-ších prací doloženo, že tento index je „ideální“ v tom smyslu, že má ten-denci kompenzovat zkreslení indexů plynoucí z použití vah jen jednoho z předmětných období.

Tento příspěvek chceme naopak věnovat několika málo souhrnným cenovým indexům*), které mají společné to, že je lze vyjádřit jako *geometrické průměry* jednoduchých individuálních cenových indexů jednotlivých položek souhrnného indexu**).

Souhrnný cenový index jako geometrický průměr jednoduchých individuálních cenových indexů lze napsat jako

$$I_p = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p_{1i}}{p_{0i}} \right)^{w_i} \quad , \quad \text{kde } \sum_{i=1}^{n} w_i = 1, \text{ přičemž}$$

I_p je souhrnný cenový index,

p_{0i} je cena *i*-té položky v základním období,

p_{1i} je cena *i*-té položky ve srovnávaném období,

w_i je váha *i*-té položky v souhrnném cenovém indexu,

n je počet položek indexu.

Jednotkový součet vah je základní podmínkou korektnosti a numerické správnosti výsledku, přičemž — jak uvidíme dále — ne vždy se podaří tuto podmínku dodržet. Triviálním případem je situace, kdy $w_i = \frac{1}{n}$ a kdy souhrnný cenový index je *prostým geometrickým průměrem* jednoduchých individuálních cenových indexů. Tento typ

*) V obsáhlé literatuře věnované souhrnným cenovým indexům se uvádí na 80 různých konstrukcí.

**) Citovaný *Fisherův ideální cenový index* v tomto tvaru vyjádřit nelze.

souhrnného cenového indexu je v současnosti spíše historickou záležitostí a přežívá již jen v podobě některých indexů kapitálového trhu.

Předmětem našeho zájmu budou netriviální případy souhrnného cenového indexu jako *váženého geometrického průměru* jednoduchých individuálních cenových indexů, a tedy především problematika konstrukce systému vah, „oceňujících“ význam jednotlivých položek v souhrnném indexu a jejich vliv na jeho výslednou hodnotu.

Váhy v souhrnném indexu vycházejí z veličin $Q_i = p_i q_i$, které se ovšem mohou vztahovat buď k základnímu období $Q_{0i} = p_{0i} q_{0i}$ nebo k období srovnávanému, kdy $Q_{1i} = p_{1i} q_{1i}$.

Normováním obou možných vah na jednotkový součet obdržíme dvě podoby souhrnného cenového indexu (*Laspeyresova* a *Paascheova* typu) v podobě vážených geometrických průměrů

$$_{(La)}I_p = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p_{1i}}{p_{0i}} \right)^{\frac{p_{0i} q_{0i}}{\sum_{i=1}^{n} p_{0i} q_{0i}}} \qquad _{(Pa)}I_p = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p_{1i}}{p_{0i}} \right)^{\frac{p_{1i} q_{1i}}{\sum_{i=1}^{n} p_{1i} q_{1i}}}$$

Součet vah je v obou případech roven jedné, je třeba ovšem ošetřit nejednoznačnost řešení, spočívající ve dvojí možnosti volby vah. V této souvislosti se nabízí — jak jinak — samozřejmě opět použití geometrického průměru obou indexů, který lze snadno přepsat do požadovaného tvaru

$$I_p = \sqrt{\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{p_{1i}}{p_{0i}}\right)^{\frac{p_{0i}q_{0i}}{\sum_{i=1}^{n} p_{0i}q_{0i}}} \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{p_{1i}}{p_{0i}}\right)^{\frac{p_{1i}q_{1i}}{\sum_{i=1}^{n} p_{1i}q_{1i}}}} =$$

$$= \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{p_{1i}}{p_{0i}}\right)^{\frac{1}{2}\left(\frac{p_{0i}q_{0i}}{\sum_{i=1}^{n} p_{0i}q_{0i}} + \frac{p_{1i}q_{1i}}{\sum_{i=1} p_{1i}q_{1i}}\right)} = ,$$

$$= \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{p_{1i}}{p_{0i}}\right)^{\frac{1}{2}\left(\frac{Q_{0i}}{\sum_{i=1}^{n} Q_{0i}} + \frac{Q_{1i}}{\sum_{i=1}^{n} Q_{1i}}\right)}$$

což je známý *Toernquistův index* (blíže viz např. [7]). Vzhledem ke konstrukci vah

$$w_i = \frac{1}{2}\left(\frac{Q_{0i}}{\sum_{i=1}^{n} Q_{0i}} + \frac{Q_{1i}}{\sum_{i=1}^{n} Q_{1i}}\right)$$

— je zřejmé že jde o prostý aritmetický průměr vah obou výše uvedených variant tohoto indexu — je evidentní, že požadavek na jednotkový součet vah je v tomto případě vždy splněn.

Na rozdíl od *Toerquistova* souhrnného cenového indexu jsou váhy (především u nás zejména vzhledem k široké publicitě v 70. a 80. letech) všeobecně známého *Montgomeryova indexu* konstruovány na principu tzv. *logaritmického průměru*. Logaritmický průměr (o němž blíže hovoří např. [4]) veličin Q_{0i}, Q_{1i} je definován jako

$$\frac{Q_{1i} - Q_{0i}}{\ln Q_{1i} - \ln Q_{0i}}$$

Normováním logaritmického průměru obdržíme váhy *Montgomeryova* souhrnného cenového indexu v podobě

$$w_i = \frac{\dfrac{Q_{1i} - Q_{0i}}{\ln Q_{1i} - \ln Q_{0i}}}{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} \left(Q_{1i} - Q_{0i}\right)}{\ln \sum\limits_{i=1}^{n} Q_{1i} - \ln \sum\limits_{i=1}^{n} Q_{0i}}}$$

Ze vzorce vah *Montgomeryova* indexu je na první pohled patrné, že je obtížné dodržet podmínku jednotkového součtu vah. Skutečně, dosažení přesně jednotkového součtu vah je v tomto případě spíše výjimečné, neboť je vázáno na platnost podmínky

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\ln Q_{1i} - \ln Q_{0i}\right) = \ln \sum_{i=1}^{n} Q_{1i} - \ln \sum_{i=1}^{n} Q_{0i},$$

která je ovšem splněna pouze, je-li $\frac{Q_{1i}}{Q_{0i}} = konst.$

Vzhledem k tomu, že splnění této podmínky nelze obecně předpokládat, platí pro váhy *Montgomeryova* cenového indexu

$$\sum_{i=1}^{n} w_1 \leq 1.$$

I když skutečná chyba nebývá prakticky nijak velká, kontrastuje tato skutečnost s dřívějšími názory, přeceňujícími praktický význam tohoto indexu.

Logaritmický průměr vah *Toernquistova* indexu vede ke konstrukci souhrnného cenového indexu *Lipověckého,* viz [5], který v citované práci vyvozuje soustavu vah pro konstrukci souhrnného cenového indexu jako

$$w_i = \frac{\dfrac{\dfrac{Q_{1i}}{\sum_{i=1}^{n} Q_{1i}} - \dfrac{Q_{0i}}{\sum_{i=1}^{n} Q_{0i}}}{\ln \dfrac{Q_{1i}}{\sum_{i=1}^{n} Q_{1i}} - \ln \dfrac{Q_{0i}}{\sum_{i=1}^{n} Q_{0i}}}}{\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\dfrac{Q_{1i}}{\sum_{i=1}^{n} Q_{1i}} - \dfrac{Q_{0i}}{\sum_{i=1}^{n} Q_{0i}}}{\ln \dfrac{Q_{1i}}{\sum_{i=1}^{n} Q_{1i}} - \ln \dfrac{Q_{0i}}{\sum_{i=1}^{n} Q_{0i}}}},$$

přičemž je na první pohled zřejmé, že podmínka jednotkového součtu vah je v tomto případě podobně jako u *Toernquistova* indexu vždy dodržena.

V souvislosti s vahami *Lipověckého* indexu je třeba upozornit, že při $\dfrac{Q_{1i}}{Q_{0i}} = konst.$ (což jsme uvedli jako zvláštní případ, kdy součet vah *Mont-gomeryova* indexu je roven jedné), jsou váhy tohoto indexu

$$w_i = \frac{Q_{0i}}{\sum_{i=1}^{n} Q_{0i}}$$

v souladu s vlastnostmi logaritmického průměru rovny

2 SOUHRNNÉ CENOVÉ INDEXY A *FISHEROVY* AXIOMY

Numerická správnost indexu není ovšem jediným kritériem jeho použitelnosti. Zajímavé srovnání poskytne pohled na **Tab. 1**, v níž jsou přehledně uvedeny vlastnosti jednotlivých v této práci citovaných souhrnných indexů z pohledu několika základních logických požadavků na indexy. Tyto požadavky jsou v literatuře známy jako *Fisherovy testy* či *Fisherovy axiomy*. Těchto požadavků může být samozřejmě formulováno podstatně více[*)], my se zaměřujeme pouze na tři, které považujeme za nejvýznamnější

- *axiom homogenity*, který požaduje, aby platí-li pro každý z jednoduchých individuálních indexů $p_1 = p_0 c$, platilo pro souhrnný cenový index $I_p = c$,
- *axiom řetězitelnosti*, který dovoluje vzájemný přepočet bazických a řetězových indexů,
- *axiom záměny času*, při jehož splnění je při záměně základního a srovnávaného období hodnota indexu rovna převrácené hodnotě původního indexu.

[*)] Zpravidla se uvádí 13 axiomů, z nichž za klíčové je označováno 8.

Tabulka 1. Souhrnné cenové indexy a *Fisherovy* axiomy

Cenový index	*Fisherův* axiom		
	homogenita	řetězitelnost	záměna času
Prostý geometrický průměr	splňuje	splňuje	splňuje
Fisherův ideální index	splňuje	nesplňuje	splňuje
Toerquistův cenový index	splňuje	nesplňuje	splňuje
Montgomeryův cenový index	nesplňuje	nesplňuje	nesplňuje
Lipověckého cenový index	splňuje	nesplňuje	nesplňuje

Tab. 1 potvrzuje všeobecně známý závěr, že index má tím větší šanci vyhovět *Fisherovým axiomům*, čím nepřijatelnějšího zjednodušení se při jeho konstrukci dopustíme. V negativním slova smyslu „pozoruhodná“ je zejména schopnost *Montgomeryova* cenového indexu nevyhovět axiomu homogenity, dokumentovaná např. schematickým příkladem v [3].

DISKUSE A ZÁVĚR

Konstrukce souhrnného cenového indexu představuje bezesporu zajímavý a (jak veškeré dosavadní zkušenosti potvrzují) také obtížně řešitelný problém. Úkol popsat jediným číslem komplikovaný pohyb velkého počtu položek, objektivně zhodnotit jejich význam pro výslednou hodnotu indexu a současně zajistit, aby toto číslo pokud možno vyhovělo také řadě dodatečných formálních požadavků (především v podobě *Fisherových axiomů*), je sice řešitelný mnoha způsoby, ale nejvýše jen s relativní a díl-čí úspěšností.

Tento příspěvek se zabýval jen několika málo souhrnnými cenovými indexy, které jsou vesměs vyjádřitelné jako vážené geometrické průměry jednoduchých individuálních cenových indexů jednotlivých položek s různě konstruovanými vahami — indexem *Toernquistovým*, *Montgomeryovým* a *Lipověckého*.

Váhy těchto indexů se rovnají v případě, že $\frac{Q_{1i}}{Q_{0i}} = konst.$ Pouze v tomto případě je také splněn jednotkový součet vah *Montgomeryova* ce-nového indexu a tento i *Lipověckého* index výjimečně vyhovují axiomu záměny času. Rozdíly mezi vahami indexů se tím více zvětšují, čím více se jednotlivé podíly $\frac{Q_{1i}}{Q_{0i}}$ vzájemně liší. V tomto případě se také zvětšuje chyba *Montgomeryova* indexu vzhledem k tomu, že součet vah se více liší od jedné (podrobnosti a příklady viz [3]).

Při kontrole splnění *Fisherových axiomů* vidíme, že mezi uvedenými třemi indexy není podstatný rozdíl. Žádný z nich nevyhovuje axiomu řetězitelnosti, pouze *Toernquistův* index obecně vyhovuje axiomu záměny času a tento index spolu s indexem *Lipověckého* vyhovují axiomu homogenity. Nesplnění *Fisherových* axiomů se ovšem neprojevuje nikterak dramaticky — např. rozdíly v hodnotách řetězových indexů a odpovídajících hodnotách vypočtených dělením sousedních bazických indexů lze na první pohled připsat na vrub nepřesností při výpočtech.

Podíváme-li se na zjištěné rozdíly mezi indexy z praktického hlediska, pak (především pokud jde o čistě numerickou stránku věci) musíme vzít v úvodu zmíněný způsob zjišťování hodnot pro číselné naplnění indexů. Uvědomíme-li si výběrovou povahu makroekonomických cenových indexů jak z hlediska *reprezentantů*, tak i z hlediska *respondentů* a uvědomíme-li si možné chyby při terénním zjišťování i následných propočtech (v relaci ke skutečné velikosti změn zkoumaných veličin, které většinou nepřesahují řádově několik procent), musíme konstatovat, že nepřesnosti, takto do indexního čísla vnesené, pravděpodobně vysoce překračují maximální možné numerické rozdíly jednotlivých souhrnných cenových indexů. K tomu přistupuje ještě nevyhnutelné časové zpoždění při zjišťování hodnot běžného období, které diskvalifikuje indexy, využívající váhy na bázi hodnot tohoto období.

Z toho co bylo uvedeno dle názoru autora vyplývá, že žádný z uve-dených indexů, přes nespornou originálnost jejich konstrukce, z níž plyne řada statisticky zajímavých vlastností, zcela jistě nepředstavuje významnější aktuální obohacení ani statistické, ani ekonomické praxe.

Vrátíme-li se na závěr k otázce v názvu tohoto příspěvku, musíme konstatovat, že z výše uvedených objektivních důvodů bohužel neexistuje ani způsob, ani nástroj, jak přesně změřit změnu cenové hladiny v ekonomice.

LITERATURA

[1] Český statistický úřad. *Indexy spotřebitelských cen*. Metodická příručka pro uživatele, [on line], [cit. 28.10.2010] Dostupné z

http://www.czso.cz/csu/redakce.nsf/i/isc_metodicka_prirucka/$File/manual_isc_2010.doc.

[2] Cyhelský, L. K názvům vzorců některých časových souhrnných cenových indexů. *Statistika* 3 (1998), s. 118–122.

[3] Minařík. B. Teorie a praxe souhrnných cenových indexů. *Štatistické metódy v praxi.* 1. vyd. Slovenská štatistická a demografická spoločnosť, 2002, s. 176–182.

[4] Hebák, P. Ještě jednou k logaritmickému rozkladu. *Acta Oeconomica Pragensis*. Statistické aplikace v hospodářství 6, (1998), s. 75–86.

[5] Lipověckij, S. S. *K dalnějšemu razvitiju inděksnogo analiza*. Moskva 1989.

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Vysoká škola polytechnická Jihlava
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

[6] Hindls, R., Hronová, S., Seger, J., Fischer, J. *Statistika pro ekonomy*. 5. vydání. Praha: Professional Publishing 2007, 415 s.

[7] Novák, I., Seger, J., Zychová, L. *Statistika B*. Učební text. Praha: Vysoká škola ekonomická, 1994, 165 s.

ZKOUMÁNÍ ZÁVISLOSTI PŘI ORDINÁLNÍM TYPU DAT S VYUŽITÍM MODELOVÁNÍ POMOCÍ STRUKTURÁLNÍCH ROVNIC

MARTIN PROKOP

Mgr. Martin Prokop, Vysoká škola polytechnická Jihlava, Tolstého 16, Jihlava, Tel. +420 567 141 111, Fax +420 567 300 727, vspj@vspj.cz

Abstrakt

Příspěvek se vztahuje k projektu GAČR: "Měření a řízení dopadu nehmotných aktiv na výkonnost podniku". Data budou získána dotazníkovým šetřením, vzhledem k převážně ordinálnímu charakteru dat budou pro zpracování dat využity vhodné statistické metody. Modelování pomocí latentních proměnných a strukturálních rovnic spojuje různé vícerozměrné statistické metody, které umožní lépe analyzovat vztahy mezi proměnnými. Vztah mezi manifestními a latentními proměnnými se řeší modelováním pomocí strukturálních rovnic (SEM) nebo analýzou lineárních strukturních vztahů (LISREL). Příspěvek obsahuje nástin modelu řešené situace, využití speciálního statistického softwaru EQS pro modelování vztahů a analýzu článků s obdobnou problematikou.

Klíčová slova (keywords)

Ordinální data, strukturální rovnice, úseková analýza

ÚVOD

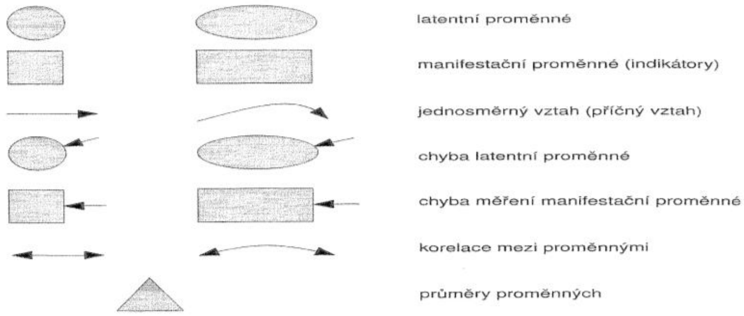
Příspěvek obsahuje popis metod vhodných pro analýzu dat převážně ordinálního typu pomocí strukturálních rovnic. Cílem je využít tyto metody na data získaná dotazníkovým šetřením v rámci projektu GAČR: "Měření a řízení dopadu nehmotných aktiv na výkonnost podniku".

.1 MODELOVÁNÍ ZÁVISLOSTÍ POMOCÍ LATENTNÍCH PROMĚNNÝCH A STRUKTURÁLNÍCH ROVNIC

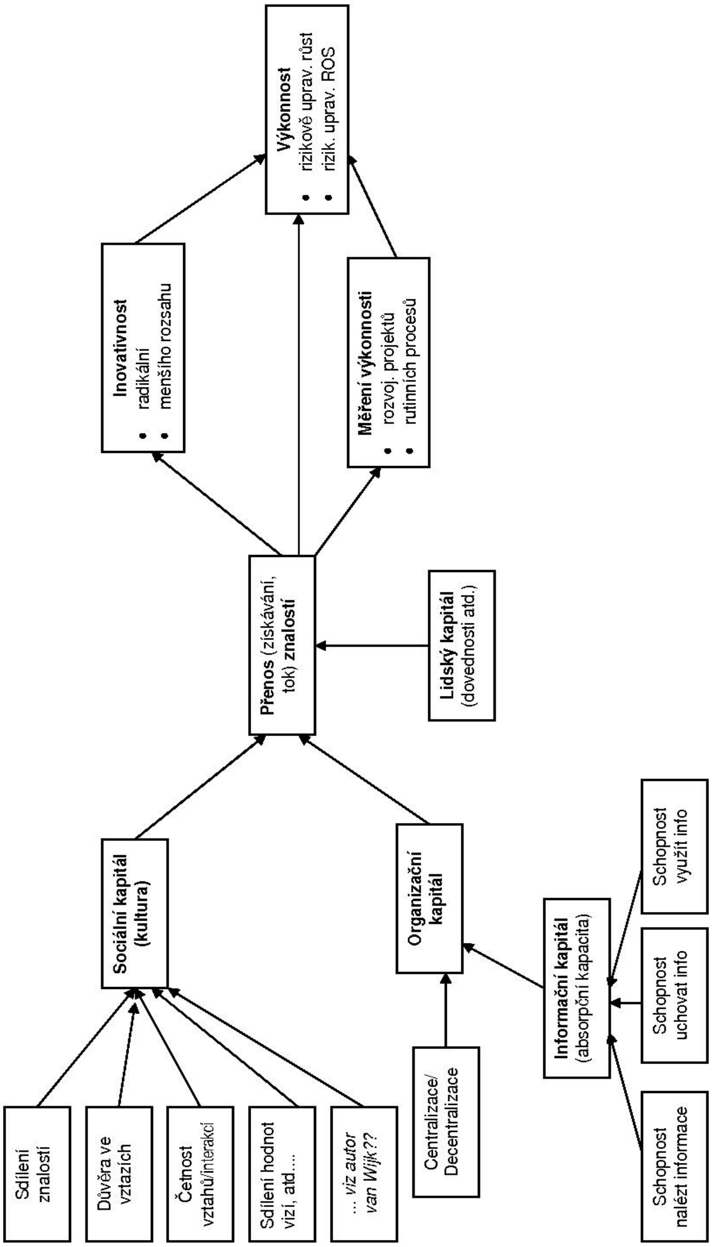
Dle [1] modelování pomocí latentních proměnných a strukturálních rovnic spojuje různé vícerozměrné statistické metody, které umožní lépe analyzovat vztahy mezi proměnnými. Vztah mezi manifestními a latentními proměnnými se řeší modelováním pomocí strukturálních rovnic (SEM) nebo analýzou lineárních strukturních vztahů (LISREL). Latentní proměnná je taková proměnná, u které nemáme k dispozici její realizaci aspoň pro některé prvky výběru, případné je latentní pro všechny prvky. Latentní proměnná je zachycena pomocí několika manifestních proměnných, které jsou přímo měřitelné.

1.1 ÚSEKOVÁ ANALÝZA

Dle [1] analýza korelačních cest – úseková analýza rozšiřuje mnohonásobnou regresní analýzu. Zkoumá vztahy mezi pozorovanými proměnnými a vychází z korelační matice pozorovaných proměnných. Používá se hlavně na ověření našich teoretických vztahů mezi proměnnými. Představy a výsledky se zobrazují pomocí úsekových grafů, viz Obr. 1. Takto lze přehledně zobrazit složité vztahové struktury. Z těchto grafů lze také odvodit model strukturních rovnic, které se použijí při odhadu parametrů. Čtverce a obdélníky označují manifestní proměnné, kružnice a elipsy latentní proměnné. Navzájem jsou propojeny pomocí jednosměrných a obousměrných šipek. Příčinnému charakteru vztahu odpovídá jednosměrná šipka. Obousměrné šipky odpovídají asociaci proměnných bez příčinného vztahu. Jednosměrné šipky obvykle směřují od nezávisle proměnných k závisle proměnným. I závisle proměnná může vystupovat jako nezávisle proměnná pro další proměnnou, takže z ní může také vycházet jednosměrná šipka. Chybová složka se značí šipkou k odpovídající proměnné. Situace našeho problému vychází ze schématu na Obr. 2.



Obr. 1. Symboly v úsekovém grafu



Obr. 2. Schéma závislostí pro klasifikaci vlivů nehmotných aktiv na výkonnost podniku (grant GAČR: "Měření a řízení dopadu nehmotných aktiv na výkonnost podniku")

1.2 KONFIRMAČNÍ FAKTOROVÁ ANALÝZA

Dle [1] klasická explorační faktorová analýza neomezuje počet faktorů nebo neurčuje, které faktorové zátěže mají mít nulovou hodnotu. Konfirmační faktorová analýza řeší hypotézy pro korelační nebo kovarianční matici za předpokladu, že měřené proměnné vznikly jako specifické lineární kombinace faktorů. Tedy místo určení a rotace libovolných faktorů analýza testuje předem určenou hypotézu o matici zátěží. Dle této analýzy můžeme rozhodnout, jestli počet faktorů a velikosti faktorových zátěží odpovídají modelu na základě nějaké teorie.

Posouzení vhodnosti modelu se dělá např. posouzením hodnověrnosti odhadnutých parametrů, jestli souhlasí znaménka vybraných parametrů s předpokládanými znaménky. Statistické testy vycházejí z asymptotické teorie odhadů a předpokládají velké rozsahy výběrů. Nejobvyklejší je chí-kvadrát test dobré shody. Posuzuje shodu původní kovarianční matice proměnných a implikované kovarianční matice vytvořené na základě modelu. Při požadovaném větším rozsahu výběru se i malá odchylka od modelu projeví vysokou hodnotou chí-kvadrát statistiky. Proto se používají indexy dobré shody, např. RMSR index vycházející z odmocniny z průměrů čtverců reziduálních hodnot rozdílu obou kovariančních matic, případně normovaný tvar SRMR do intervalu (0,1) nebo RMSEA koeficient. Obecně se výsledky pomocí různých indexů mohou lišit a nelze podle jednoho z nich rozdělit modely na přijatelné a nepřijatelné. Ke každému modelu je třeba postupovat individuálně. Často lze jedněmi daty proložit několik statisticky ekvivalentních modelů s odlišnou interpretací. Vhodnost modelu potom posuzujeme podle vytvořené teorie a znalostí předmětné oblasti.

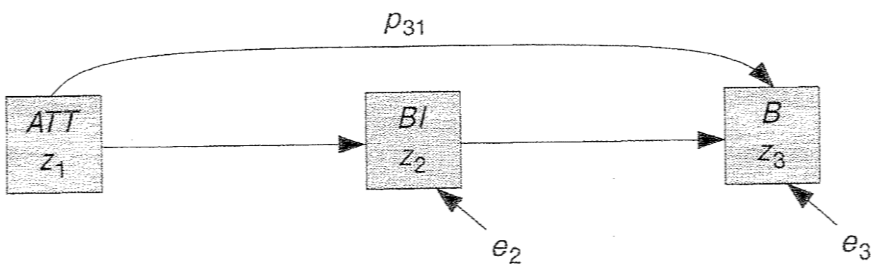
1.3 SOFTWARE EQS

Pro statistické zpracování využijeme statistický software EQS, který slouží k modelování situací pomocí strukturálních rovnic. Dle [2] systém umožňuje využívat mnohé statistické metody pro řešení závislostí: vícenásobná a vícerozměrná regrese, konfirmační faktorová analýza, úseková analýza atd. Software nevyžaduje znalost maticové algebry, umožňuje spočítat běžné statistiky i pro data nepocházející z normálního rozdělení.

2 PRAKTICKÉ PŘÍKLADY STRUKTURÁLNÍCH MODELŮ

2.1 UKÁZKA TVORBY STRUKTURÁLNÍCH ROVNIC

Uvažujme jako v příkladu z [1] vztahy mezi postoji (*ATT*), behaviorálními cíli (*BI*) a skutečným chováním (*B*). Úsekový graf je na Obr. 3. Předpokládá se, že závisle proměnná *B* je způsobena proměnnou *BI*, která je ovlivňována proměnnou *ATT*. Jde o jednoduchý model jednosměrné vazby bez zpětných smyček. Proměnná *ATT* je exogenní, její příčiny jsou vně modelu. Proměnné *B* a *BI* jsou endogenní, jejichž variabilita je určena dalšími proměnnými v modelu. Příčinné vztahy jsou zobrazeny šipkami od předpokládaných příčin k předpokládaným důsledkům.



Obr. 3. Úsekový graf zobrazující závislosti proměnných

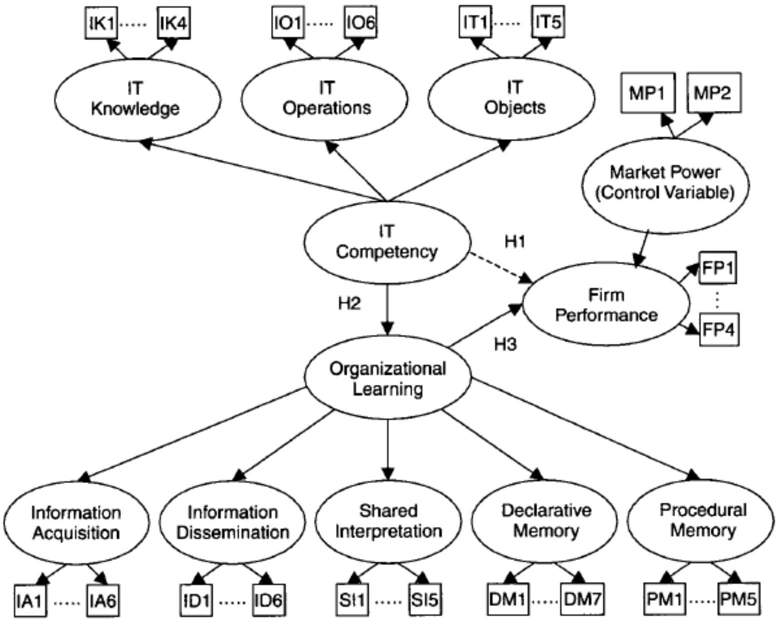
V praxi většinou model nevyjádří přesně závisle proměnnou, proto je třeba počítat s nějakou chybou, což jsou v tomto případě dvě reziduální proměnné *e*. V modelu bychom měli použít všechny vlivy, které jsme schopni určit a změřit. V úsekové analýze je třeba nalézt koeficienty modelu odpovídající vlivu jednotlivých proměnných. Při modelování pomocí modelů korelačních cest odhadujeme koeficienty modelu daného strukturálními rovnicemi. V našem příkladě ($z_1 = ATT, z_2 = BI, z_3 = B$) mají tvar:

$$z_1 = e_1$$
$$z_2 = p_{21} z_1 + e_2$$
$$z_3 = p_{32} z_2 + p_{31} z_1 + e_3.$$

Standardizovaná proměnná z_1 je určena jen vnějšími náhodnými vlivy. Proměnná z_2 závisí na proměnné z_1 a vnějších vlivech, proměnná z_3 závisí na z_1, z_2. Proměnná *B* je přímo ovlivněna proměnnou *BI* a nepřímo proměnnou *ATT*. Celkový efekt na endogenní proměnnou je shrnutím všech přímých i nepřímých vlivů exogenních i dalších endogenních proměnných. Tedy např. celkový vliv proměnné *ATT* na *B* odpovídá koeficientu $p_{32} p_{21} + p_{31}$. Strukturální rovnice se vyřeší pomocí soustavy dvou vícenásobných regresních rovnic.

2.2 VLIV IT KOMPETENCÍ NA VÝKONNOST FIRMY

Dle článku [3] byl zkoumán vliv IT kompetencí a organizačního školení na výkonnost firem. Model situace je na Obr. 4.



Obr. 4. Vliv IT kompetencí a organizačního školení na výkonnost firmy

Pro analýzu byl použit software EQS a zvolena metoda elipticky vážených nejmenších čtverců. Používá vícerozměrné eliptické rozdělení, které je zobecněním normálního požadovaného u metody maximální věrohodnosti. Zkoumán byl model samotného vlivu IT kompetencí a stejný model, kdy zprostředkovatelem zlepšení výkonu bylo organizační školení. Výsledky jsou v Tab. 1. I přes vysoké hodnoty chí-kvadrát statistik hodnoty ostatních indexů shody naznačují dobrou shodu. Výsledky ukazují, že organizační školení zprostředkovává vliv IT kompetencí na výkonnost podniku. Jednak model se školením vystihuje více celkové variability, dále existuje dle koeficientů v tabulce kladný vztah mezi IT kompetencemi a organizačním školením (0.504) a také mezi organizačním školením a výkonností podniku (0.371). Navíc signifikantní vztah mezi IT kompetencemi a výkonností firmy v modelu nezprostředkovaného přímého vlivu (0.166) už není signifikantní v případě modelu zprostředkovaného vlivu (0.014).

Tab. 1. Srovnání přímého vlivu IT kompetencí na výkonnost firmy s vlivem zprostředkovaným prostřednictvím organizačního školení.

Parameter[c]	Direct effects model[a]	Partial mediation model[b]
Hypothesized paths		
ITCOMP → FIRMPERF (H1)	0.166 (2.07)	0.014 (0.15)
ITCOMP → ORGLEARN (H2)	—	0.504 (4.94)
ORGLEARN → FIRMPERF (H3)	—	0.371 (4.03)
Control measure		
MARKPOW → FIRMPERF	0.423 (3.09)	0.376 (2.79)
Measurement model and first-order factors		
ITCOMP → ITKNOW[e]	0.681[d]	0.626[d]
ITCOMP → ITOPS	0.788 (6.94)	0.898 (7.03)
ITCOMP → ITOBJECT	0.588 (5.94)	0.505 (5.24)
ORGLEARN → INFOACQ[e]	—	0.711 (7.39)
ORGLEARN → INFODISS	—	0.827 (10.90)
ORGLEARN → SHARINT	—	0.725 (9.10)
ORGLEARN → DECMEM	—	0.746 (9.08)
ORGLEARN → PROCMEM	—	0.919[d]
FIRMPERF → CUSTRENT	0.307[d]	0.270[d]
FIRMPERF → SALEGROW	0.576 (8.72)	0.577 (8.32)
FIRMPERF → PROFIT	0.969 (15.61)	0.950 (14.57)
FIRMPERF → ROI	0.935 (14.96)	0.952 (14.61)
MARKPOWR → SHARE	0.514[d]	0.508[d]
MARKPOWR → SIZE	0.518 (4.44)	0.513 (4.11)
Goodness-of-fit statistics		
χ^2	= 415.80 ($p < 0.001$)	= 1801.95 ($p < 0.001$)
d.f.	= 230	= 1273
Bentler–Bonnett normed fit index (NFI)	= 0.924	= 0.911
Bentler–Bonnett non-normed fit index (NNFI)	= 0.964	= 0.972
Comparative fit index (CFI)	= 0.965	= 0.972
Average off-diagonal absolute standardized residuals	= 0.073	= 0.076

ZÁVĚR

Příspěvek ukázal možnosti využití modelování pomocí strukturálních rovnic na praktických příkladech. Cílem dalšího výzkumu je využít tyto metody pro analýzu modelu vlivu nehmotných aktiv na výkonnost podniku zobrazeného na Obr. 2.

LITERATURA

1) Hendl, J.: Přehled statistických metod: analýza a metaanalýza dat. Portál, Praha (2006). ISBN 978-80-7367-482-3

2) http://www.mvsoft.com

3) Tippins, M., J., Sohi, R., S.: IT competency and firm performance: is organizational learning a missing link? Strategic managment journal 24: 745-761 (2003)

MATEMATIKA A EKONOMIE – DVĚ NEROZLUČNÉ KAMARÁDKY

PETR MUSIL *)

Abstrakt

The aim of the paper is to share the experience with teaching economics using mathematics. Economics is a science on the border between exact sciences and humanities. Some economists refuse mathematics. They argue that mathematics too simplifies the human behaviour. Other economists consider mathematics for a good instrument to explain important relationships between the variables, which is very useful to predict the future economic development and possible impacts of several economic measures.

Klíčová slova (keywords)

Economics, mathematics

ÚVOD

Matematika a ekonomie jsou na první pohled vědy, které se příliš v lásce nemají. Ekonomie bývá, celkem legitimně, řazena mezi společenské vědy a tím pádem by se dalo předpokládat, že využití matematických metod bude velmi omezené. Zjednodušeně řečeno, matematika v ekonomii bývá někdy podceňovaná a poněkud degradovaná na pouhopouhý nástroj pro oceňování účetních položek. Opak je však pravdou. Matematika je nedílnou součástí ekonomické teorie již po několik desetiletí, možná i staletí. Matematice dnes ekonomové vděčí za to, že jsou schopni jasně dokázat určité zákonitosti, které platí na reálných trzích či celých reálných ekonomikách. Bez matematiky bychom například mohli zcela

*) Petr Musil, Ing. Ph.D., Vysoká škola polytechnická Jihlava, Katedra ekonomických studií, Tolstého 16, Jihlava, e-mail: musil11@vspj.cz

„odepsat“ celou moderní mikroekonomii. Bez matematických nástrojů bychom vůbec neznali význam a důležitost mezních veličin v celé ekonomické teorii, nebyli bychom schopni odvozovat a používat základní ekonomické funkce, kterými jsou poptávka a nabídka. Ekonomie se dnes bez matematiky zkrátka neobejde.

Na druhou stranu by se dalo říci, že díky matematice bývá někdy ekonomie neoprávněně považována za vědu, kterou běžný smrtelník není schopen pochopit nebo dokonce aplikovat. Cílem tohoto příspěvku je podělit se o své zkušenosti z výuky ekonomie, ať už mikroekonomie či makroekonomie v souvislosti s využíváním matematického aparátu k ilustraci základních ekonomických zákonitostí a vztahů. V tomto ohledu nechci svůj příspěvek prezentovat jako odborné vědecké dílo, nýbrž jako určité zamyšlení či úvahu nad tím, jak vnímám vztah studentů ekonomie k matematickým nástrojům, bez kterých se v zásadě nelze obejít. Budu zde prezentovat své zkušenosti jak s výukou základního, tak středně pokročilého kurzu mikroekonomie a makroekonomie.

1 ZÁKLADNÍ MATEMATICKÉ NÁSTROJE VYUŽÍVANÉ PŘI VÝUCE EKONOMIE

Cílem základního kurzu ekonomie (ať už mikro nebo makro) samozřejmě není pomocí sofistikovaných matematických metod dokazovat, jak proměnná X ovlivňuje vývoj proměnné Y, ale to, aby si studenti osvojili základní termíny ekonomie, aby byli schopni vysvětlit, co je předmětem jejího zkoumání a proč je vůbec dobré ekonomii studovat. Na druhou stranu se v mnoha případech nelze zcela vyhnout použití matematického aparátu. Od čerstvého absolventa střední školy jistě nikdo neočekává, že zcela bez problémů ovládá derivace, integrály či diferenciální rovnice. Pro základní kurzy ekonomie je však zcela nezbytné, aby student plně ovládal alespoň řešení soustavy rovnic o dvou neznámých a hlavně, aby dokázal tak zvaně „číst grafy“. Tyto dvě dovednosti považuji za absolutní základ, bez kterého se student základních kurzů ekonomie neobejde.

Pokud jde o středně pokročilé kurzy ekonomie, a zejména středně pokročilý kurz mikroekonomie, zde se již povětšinou využívají

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Vysoká škola polytechnická Jihlava
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

poněkud složitější matematické operace, ovšem takové, které nijak výrazně nepřesahují matematické dovednosti, kterými by měl disponovat absolvent gymnázia. Především pro optimalizační úlohy je nezbytné využití derivací, pomocí kterých hledáme lokální extrémy užitkových, produkčních či ziskových funkcí, ale i pro řešení úloh, kde měříme poptávkové elasticity, z jejichž hodnot následně vyvozujeme určité závěry ohledně zkoumaných statků nebo služeb.

2 ZKUŠENOSTI Z VÝUKY

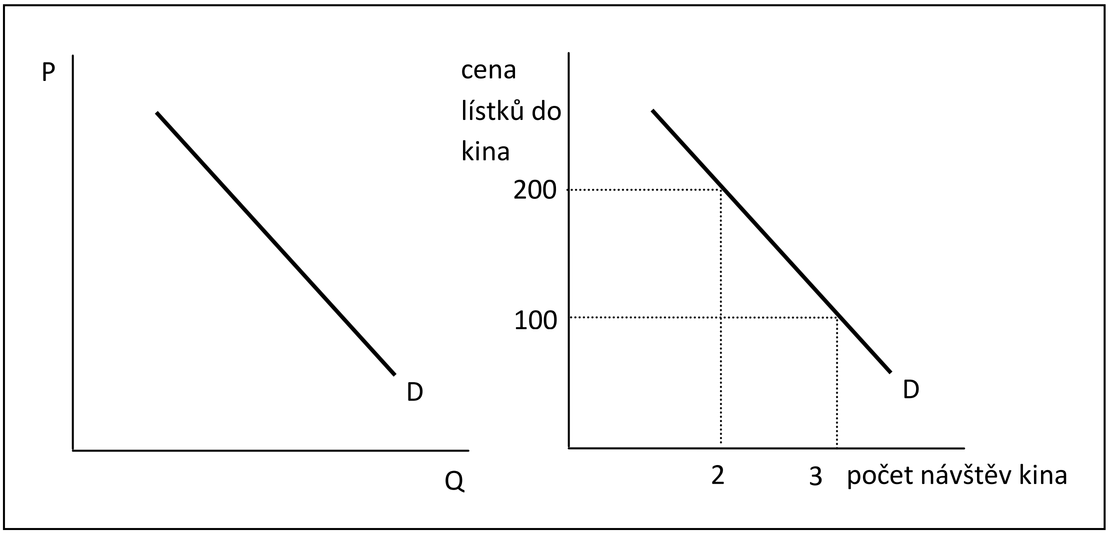
V této části bych se se čtenáři rád podělil o své praktické zkušenosti z výuky základních i středně pokročilých kurzů ekonomie. Základní kurzy jsou obvykle vyučovány na bakalářském stupni vysokých škol, středně pokročilé kurzy pak na stupni magisterském.

Obecně mohu říci, že v rámci současných podmínek není úroveň studentů v oblasti schopnosti používat matematiku v ekonomii špatná. Pokud se vyskytují nějaké problémy, pak je vidím především v tom, že studenti mívají vůči matematice zbytečné předsudky ve smyslu „nechápu, k čemu je to dobré“, „vůbec nevím, jak to mám počítat (zakreslit)“, nebo „to nemohu nikdy pochopit, a tak se o to ani nebudu snažit“. V takových situacích se snažím, stejně jako by to udělal kterýkoli jiný učitel, studentům vysvětlit, že veškeré předsudky jsou naprosto zbytečné a ekonomie není věda, kterou je schopna pochopit jen hrstka vyvolených.

Přesto bych rád uvedl nejčastější problémy, se kterými se při výuce setkávám. Na úrovni základního kurzu mikroekonomie činí studentům nejčastěji problém přečíst jakýkoli obrázek, kde je zobrazena nějaká funkce. Jelikož mikroekonomie stojí na funkcích poptávky a nabídky, je tento problém spojen právě s těmito funkcemi. V takovém případě se jako nejlepší řešení jeví uvést příklad z reálného života, navíc takový, který se týká konkrétního studenta či studentky. Následující obrázek ilustruje rozdíl v tom, jak je funkce poptávky obecně prezentována v učebnicích ekonomie a jak lze tuto funkci přiblížit studentům, kteří mají problém s obecnou definicí poptávkové funkce.

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Vysoká škola polytechnická Jihlava
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

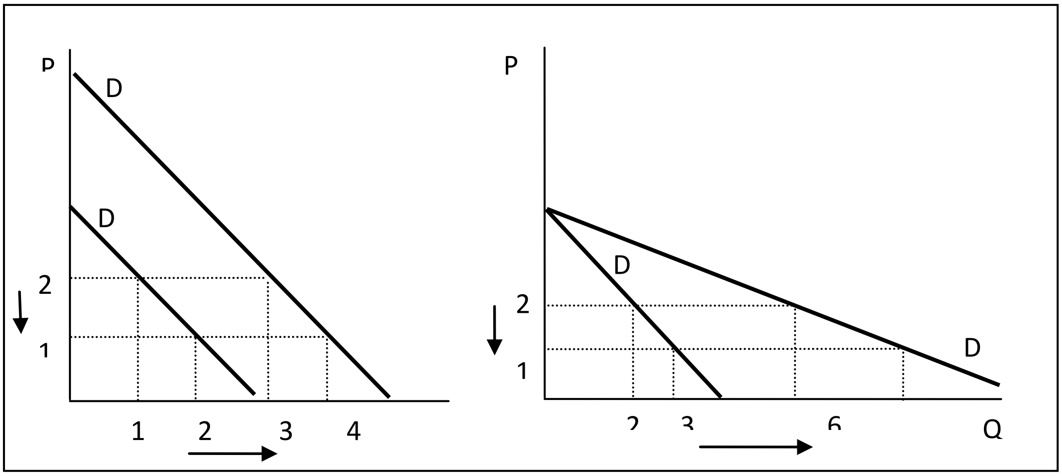
Obrázek 1. Funkce poptávky



Pokud definujeme poptávku jako ochotu spotřebitele nakoupit určité množství zboží při různých cenách, pak to nemusí být pro studenty srozumitelné. Pokud ale uvedeme konkrétní příklad, třeba počet návštěv kin měsíčně na základě ceny vstupenky, pak je pravděpodobné, že studenti princip poptávkové funkce pochopí daleko snáze. Stejné aplikace je možno provádět u kterýchkoli jiných grafických nástrojů, které se v ekonomii využívají.

Dalším problémem, se kterým se poměrně často setkávám, je zaměňování sklonu a elasticity funkce. Studenti mají obecně tendenci tyto dvě odlišné veličiny ztotožňovat. Je obecně známo, že sklon funkce hovoří o poměru absolutních změn a elasticita o poměru změn relativních. Vysvětlení, v čem spočívá rozdíl mezi sklonem a elasticitou lze opět ukázat na příkladu poptávkové funkce, viz následující obrázek.

Obrázek 2. Sklon vs. elasticita poptávkové funkce



Na Obrázku 2 máme vyobrazeny dvě situace. V levé části vidíme dvě poptávkové funkce, které jsou rovnoběžné, mají tedy stejný sklon po celé své délce. Mají ale tyto poptávky stejnou cenovou elasticitu? Nemají. Pokud budeme uvažovat pokles ceny z 2 jednotek na 1 jednotku, pak vidíme, že v případě poptávky D_1 došlo k růstu poptávaného množství z 1 na 2 jednotky, zatímco stejný cenový pokles vedl u poptávky D_2 k růstu poptávaného množství ze 3 jednotek na 4. V obou případech se jedná o stejné absolutní změny (1 jednotka). Ale pokud budeme hovořit o změnách relativních, pak vidíme, že pokles ceny o 50 % vedl u poptávky D_1 k růstu poptávaného množství o 100 %, zatímco u poptávky D_2 pouze o 1/3 tj. o 33,3 %. Je tedy zřejmé, že nejen že poptávky mají různou cenovou elasticitu, ale že navíc poptávka D_1 je cenově elastičtější, tedy pružnější.

V pravé části Obrázku 2 máme naopak příklad, kdy jsou poptávkové funkce různoběžné, tedy mají různý sklon (poptávka D_1 je strmější než D_2). Jak to bude s jejich elasticitou? Uvažujme opět, že cena poklesla o 50 % (z 2 na 1). Tato cenová změna povede v případě poptávky D_1 k růstu poptávaného množství ze 2 na 3 jednotky, tj. o 50 %, v případě poptávky D_2 z 6 na 9 jednotek (tedy absolutně více), což činí taktéž zvýšení poptávaného množství o 50

%. V tomto případě mají sice poptávky různý sklon, ale stejnou cenovou elasticitu.

V případě středně pokročilých kurzů ekonomie pak studentům činí největší problémy derivace funkce. Přitom na základě kurzů matematiky, které by měli absolvovat již v bakalářském stupni studia, by měli derivace plně ovládat. Jakmile dojde na řešení optimalizačních úloh (maximalizace užitku, výstupu či ekonomického zisku), problémy se nejčastěji vyskytují v chybně provedených derivací (příklad z poslední doby: derivace součtu provedena jako derivace součinu).

3 DOPORUČENÍ

Nechci zde udílet žádné knížecí rady, nicméně jako zásadní problém se mi jeví to, že studenti při studiu matematiky mnohdy nevidí praktické uplatnění toho, co se mají naučit. Tím pádem může docházet k vytváření již dříve zmíněných předsudků vůči matematice jako takové a ekonomie je pak poměrně často vnímána jako další matematicky zaměřený předmět. Ekonomie je však věda o lidském jednání a matematika zde slouží „pouze“ jako nástroj k lepšímu pochopení souvislostí reálných hospodářských jevů.

Domnívám se tedy, že cesta by mohla vést skrze určité „polidštění“ matematiky a důsledné vysvětlování a zdůvodňování, proč se po studentech chce, aby uměli řešit rovnice, vyšetřovat průběh funkce, derivovat, případně integrovat. Studenti by měli vědět, že nejde o samoúčelné učení se něčeho, co v dalším studiu nebo dokonce praxi neuplatní. Samozřejmě tentýž apel směřuje k učitelům ekonomie, aby opravdu důsledně vysvětlovali, demonstrovali na příkladech a poukazovali na důležité souvislosti vždy, když se vědomosti studentů snaží obohatit o tak fascinující vědu, kterou ekonomie bezpochyby je. Matematika jistě nemůže nikdy stvořit univerzální model lidského jednání, ale je určitě velmi užitečnou vědou, která ekonomii obohacuje a napomáhá tomu, abychom dovedli pochopit reálné ekonomické jevy, vysvětlit je a predikovat, jak se projeví to či ono opatření, ta či ona změna nebo jak ekonomickou realitu ovlivní, změní-li se vnější podmínky.

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Vysoká škola polytechnická Jihlava
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

LITERATURA

SAMUELSON, P.A., NORDHAUS, W.D., GREGOR, M.: Ekonomie. 18. vyd. Praha: Svoboda 2007. 775 s. ISBN 9798020505903.

HOŘEJŠÍ, B. et al.: Mikroekonomie. 4 rozš. vydání. Praha: Management Press 2006. 573 s. ISBN 807261150X.

SOME EXAMPLES OF GAUSSIAN CURVATURE, MEAN CURVATURE AND PRINCIPAL CURVATURES OF GENERALIZED COBB-DOUGLAS SURFACES

MILOŠ KAŇKA, EVA KAŇKOVÁ

Some Examples of Gaussian Curvature, Mean Curvature and principal Curvatures of generalized Cobb-Douglas surfaces

Miloš Kaňka, Eva Kaňková

Introduction

The aim of this paper is to give some examples of generalized Cobb-Douglas surfaces and some geometric characteristics of these surfaces. In case of growing returns to scale Cobb-Douglas surfaces have the form

$$\gamma(x,y) = (x, y, Ax^{\alpha}y^{\beta}), \text{ where } \alpha + \beta > 1.$$

Analogically in case of decrease returns to scale Cobb-Douglas surfaces have the form

$$\gamma(x,y) = (x, y, Ax^{\alpha}y^{\beta}), \text{ where } 0 < \alpha + \beta < 1.$$

We are interested in Gaussian curvature, mean curvature and principal curvatures of these surfaces.

Surfaces in $\mathcal{R}^3$

As was given in [1] we are going to study smooth surfaces, whose atlas consists of regular maps. The basic tool for our study is the shape operator defined as follows.

Definition 1. Let $S \subset \mathcal{R}^3$ be a regular surface and let n be a surface normal to S defined in a neighborhood of a point $x \in S$. For a tangent vector $v \in T_x(S)$ we define

$$\varphi(v) = -n_v.$$

Lemma 1. Let $S \subset \mathcal{R}^2$ and $\gamma : U \to \mathcal{R}^3$ be a regular map. Then

$$\varphi(\gamma_x) = -n_x \quad \text{and} \quad \varphi(\gamma_y) = -n_y. \tag{1}$$

Proof: For fix y_0, $\gamma(x, y_0)$ is a curve in S. We have

$$\varphi(\gamma_x(x,y_0)) = \varphi(\gamma'(x,y_0)) = -n_{\gamma'(x,y_0)} = -(n \circ \gamma)'(x) = -n_x.$$

Analogically $\varphi(\gamma_y(x_0,y)) = -n_y$.

Lemma 2. At each point x of a regular surface $S \subset \mathcal{R}^3$, the shape operator is a linear map $\varphi : T_x(S) \to T_x(S)$.

Lemma 3. The shape operator of a regular surface is self adjoint, i.e.

$$\varphi(v) \cdot w = v \cdot \varphi(w) \tag{2}$$

for all tangent vectors $v, w \in T_x(S)$.

Remark 1. Previous equations give

$$\begin{aligned}
0 &= (n \cdot \gamma_x)_x = n_x \cdot \gamma_x + n \cdot \gamma_{xx} \Rightarrow -n_x\gamma_x = n \cdot \gamma_{xx},\\
0 &= (n \cdot \gamma_x)_y = n_y \cdot \gamma_x + n \cdot \gamma_{xy} \Rightarrow -n_y\gamma_x = n \cdot \gamma_{xy} = n \cdot \gamma_{yx},\\
0 &= (n \cdot \gamma_y)_y = n_y \cdot \gamma_y + n \cdot \gamma_{yy} \Rightarrow -n_y\gamma_y = n \cdot \gamma_{yy}.
\end{aligned}$$

Remark 2. Let $\gamma : U \to \mathcal{R}^3$ be a regular map. Let us denote

$$\begin{aligned}
l_{11} &= -\, n_x \cdot \gamma_x = n\gamma_{xx},\\
l_{12} &= -\, n_y \cdot \gamma_x = n\gamma_{xy} = n\gamma_{yx} = -n_x\gamma_y,\\
l_{22} &= -\, n_y \cdot \gamma_y = n\gamma_{yy}.
\end{aligned} \tag{3}$$

The function l_{11}, l_{12}, l_{22} are coefficients of the second fundamental form $\mathcal{F}_{II}$ of γ [see 1].

$$F_{II} = l_{11} dx^2 + 2 l_{12} dx\, dy + l_{22}^2\, dy^2.$$

If we denote $g_{11} = ||\gamma_x||^2,\ g_{12} = \gamma_x \cdot \gamma_y,\ g_{22} = ||\gamma_y||^2$, the first fundamental form $\mathcal{F}_I$ can be written in the form

$$F_I = g_{11} dx^2 + 2 g_{12} dx\, dy + l_{22} dy^2.$$

Theorem 1. Let $\gamma :\ U \to \mathcal{R}^3$ be a regular map. Then the shape operator φ is given with respect to the basic $\gamma_x,\ \gamma_y \in T_x(S)$ in the form

$$\begin{aligned} \varphi(\gamma_x) &= \frac{g_{22} l_{11} - g_{12} l_{12}}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2} \gamma_x + \frac{g_{11} l_{12} - g_{12} l_{11}}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2} \gamma_y, \\ \varphi(\gamma_y) &= \frac{g_{22} l_{12} - g_{12} l_{22}}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2} \gamma_x + \frac{g_{11} l_{22} - g_{12} l_{12}}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2} \gamma_y. \end{aligned} \tag{4}$$

Remark 3. As γ is a regular map and γ_x and γ_y are lineraly independent we have

$$\begin{aligned} \varphi(\gamma_x) &= \alpha_{11} \gamma_x + \alpha_{21} \gamma_y = -n_x, \\ \varphi(\gamma_y) &= \alpha_{12} \gamma_x + \alpha_{22} \gamma_y = -n_y, \end{aligned} \tag{5}$$

for functions $\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{12}, \alpha_{22}$ which we need to compute. From (1) and (5) we have

$$\begin{aligned} l_{11} &= -\, n_x \gamma_x = g_{11} \alpha_{11} + g_{12} \alpha_{21}, \\ l_{12} &= -\, n_x \gamma_y = g_{12} \alpha_{11} + g_{22} \alpha_{21}, \\ l_{12} &= -\, n_y \gamma_x = g_{11} \alpha_{12} + g_{12} \alpha_{22}, \\ l_{22} &= -\, n_y \gamma_y = g_{12} \alpha_{12} + g_{22} \alpha_{22}. \end{aligned} \tag{6}$$

Equations (6) can be written in the form

$$\begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{12} & l_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}, \end{pmatrix}$$

$$\text{or} \quad \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}, \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{12} & l_{22} \end{pmatrix}.$$

So we have

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}, \end{pmatrix} = \frac{1}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2} \begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{12} & g_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{12} & l_{22} \end{pmatrix}$$

from which immediately follows (4).

Remark 4. The shape operator can be represented by a matrix

$$\mathcal{A}(\varphi) = \begin{pmatrix} \dfrac{g_{22} l_{11} - g_{12} l_{12}}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}, & \dfrac{g_{11} l_{12} - g_{12} l_{11}}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2} \\ \dfrac{g_{22} l_{12} - g_{12} l_{22}}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}, & \dfrac{g_{11} l_{22} - g_{12} l_{12}}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2} \end{pmatrix}.$$

As $\quad \mathcal{K} = \det \mathcal{A}(\varphi) \quad$ and $\quad \mathcal{H} = \frac{1}{2} \mathrm{tr} \mathcal{A}(\varphi)$ we have

$$\mathcal{K} = \frac{l_{11} l_{22} - l_{12}^2}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2} \quad \text{and} \quad \mathcal{H} = \frac{l_{11} g_{22} - 2 l_{12} g_{12} + l_{22} g_{11}}{2(g_{11} g_{22} - g_{12}^2)}.$$

Example 1. In case of growing returns to scale we will study the Gaussian curvature, mean curvature and principal curvatures of a special type Cobb-Douglas surface of the form

$$\gamma(x,y) = (x,y,xy), \quad \text{i.e. } \alpha+\beta = 2 \text{ (see Fig. 1).}$$

Solution. We have

$$\gamma_x = (1,0,y), \quad \gamma_y = (0,1,x), \quad g_{11} = 1+y^2, \quad g_{12} = xy, \quad g_{22} = 1+x^2.$$

The unit normal is $n = \dfrac{(-y,-x,1)}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$. Further we have

$$\gamma_{xx} = (0,0,0), \quad \gamma_{xy} = (0,0,1), \quad \gamma_{yy} = (0,0,0).$$

The equations

$$l_{11} = n\cdot\gamma_{xx}, \quad l_{12} = n\cdot\gamma_{xy}, \quad l_{22} = n\cdot\gamma_{yy}$$

gives

$$l_{11} = 0, \quad l_{12} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}, \quad l_{22} = 0.$$

So we have

$$K = \frac{-1}{(x^2+y^2+1)^2}, \qquad H = \frac{-xy}{(x^2+y^2+1)^{3/2}}.$$

From this equation fallows that for all $x,y \in \mathcal{R}$ the Gaussian curvature is negative, which means that every point of this type of Cobb-Douglas surface $\gamma(x,y) = (x,y,xy)$ is hyperbolic. Principal curvatures k_1 and k_2 can be written in the form:

$$k_1 = \frac{1}{(x^2+y^2+1)^{3/2}}\left[-xy+\sqrt{x^2y^2+(x^2+y^2+1)}\right]$$

$$\text{and} \quad k_2 = \frac{1}{(x^2+y^2+1)^{3/2}}\left[-xy-\sqrt{x^2y^2+(x^2+y^2+1)}\right]$$

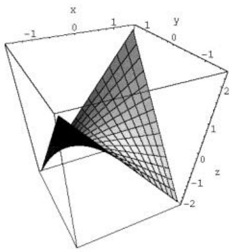


Fig. 1

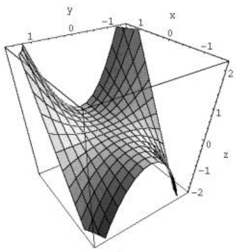


Fig. 2

Example 2. In this example we will study Gaussian curvature, mean curvature and principal curvatures of Cobb-Douglas surface

$$\gamma(x,y) = (x,y,xy^2), \qquad \text{i.e. } \alpha+\beta = 3 \text{ (see Fig. 2).}$$

Solution. The basis of $T_x(S)$ has the form $\gamma_x = (1,0,y^2), \quad \gamma_y = (0,1,2xy)$,

$$g_{11} = 1+y^4, \qquad g_{12} = 2xy^3, \qquad g_{22} = 1+4x^2y^2,$$
$$\gamma_{xx} = (0,0,0), \quad \gamma_{xy} = (0,0,2y), \quad \gamma_{yy} = (0,0,2x).$$

The unit normal is $n = \dfrac{(-y^2, -2xy, 1)}{\sqrt{y^4 + 4x^2y^2 + 1}}$. Further we have

$$l_{11} = 0, \quad l_{12} = \frac{2y}{\sqrt{y^4 + 4x^2y^2 + 1}}, \quad l_{22} = \frac{2x}{\sqrt{y^4 + 4x^2y^2 + 1}}.$$

The Gauss curvature and mean curvature have the forms

$$K = \frac{-4y^2}{(y^4 + 4x^2y^2 + 1)^2} \leq 0, \quad H = \frac{x - 3xy^4}{(y^4 + 4x^2y^2 + 1)^{3/2}}.$$

If $y \neq 0$ then $K < 0$ and every point of given surface is hyperbolic. Principal curvatures can be written in the form:

$$k_1 = \frac{1}{(y^4 + 4x^2y^2 + 1)^{3/2}} \left[x - 3xy^4 + \sqrt{(x - 3xy^4)^2 + 4y^2(y^4 + 4x^2y^2 + 1)} \right],$$
$$k_2 = \frac{1}{(y^4 + 4x^2y^2 + 1)^{3/2}} \left[x - 3xy^4 - \sqrt{(x - 3xy^4)^2 + 4y^2(y^4 + 4x^2y^2 + 1)} \right].$$

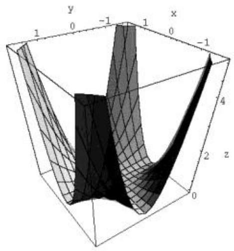


Fig. 3

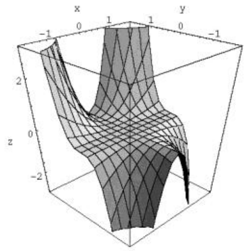


Fig. 4

Example 3. In this example we will study Cobb-Douglas surfaces which are practically used in case of growing returus to scale:

$$\text{a)} \quad \gamma(x, y) = (x, y, x^2y^2), \qquad \text{i.e. } \alpha + \beta = 4 \text{ (see Fig. 3).}$$

Solution. The basis of $T_x(S)$ has the form $\gamma_x = (1, 0, 2xy^2)$, $\quad \gamma_y = (0, 1, 2yx^2)$,

$$g_{11} = 1 + 4x^2y^4, \quad g_{12} = 4x^3y^3, \quad g_{22} = 1 + 4x^4y^2.$$

The unit normal has the form $n = \dfrac{(-2xy^2, -2yx^2, 1)}{\sqrt{4x^2y^4 + 4y^2x^4 + 1}}$. Functions l_{11}, l_{12}, l_{22} are:

$$l_{11} = \frac{2y^2}{\lambda}, \quad l_{12} = \frac{4xy}{\lambda}, \quad l_{22} = \frac{2x^2}{\lambda}, \quad \text{where } \lambda = \sqrt{4x^2y^4 + 4y^2x^4 + 1}.$$

The Gaussian curvature and mean curvature can be written in the form

$$K = \frac{-12x^2y^2}{(4x^2y^4 + 4y^2x^4 + 1)^2}, \quad H = \frac{x^2 + y^2 - 8x^4y^4}{(4x^2y^4 + 4y^2x^4 + 1)^{3/2}}.$$

$K \leq 0$ for all $(x, y) \in \mathcal{R}$. Every point $(x, y) \neq (0, 0)$ is hyperbolic.

$$\text{b)} \quad \gamma(x, y) = (x, y, x^2y^3), \qquad \text{i.e. } \alpha + \beta = 5 \text{ (see Fig. 4).}$$

Solution. The basis of tangent space have the form $\gamma_x = (1, 0, 2xy^3)$, $\gamma_y = (0, 1, 3x^2y^2)$. Functions g_{11}, g_{12}, g_{22} are

$$g_{11} = 1 + 4x^2y^6, \quad g_{12} = 6x^3y^5, \quad g_{22} = 1 + 9x^4y^4.$$

We have $\gamma_{xx} = (0, 0, 2y^3), \gamma_{xy} = (0, 0, 6xy^2), \gamma_{yy} = (0, 0, 6x^2y)$. The unit normal

has the form $n = \dfrac{(-2xy^3, -3x^2y^2, 1)}{(4x^2y^6 + 9x^4y^4 + 1)^{1/2}}$. The function l_{11}, l_{12}, l_{22} are

$$l_{11} = \frac{2y^3}{\lambda}, \quad l_{12} = \frac{6xy^2}{\lambda}, \quad l_{22} = \frac{6x^2y}{\lambda}, \quad \text{where} \quad \lambda = \left(4x^2y^6 + 9x^4y^4 + 1\right)^{1/2}.$$

The Gaussian curvature and mean curvature are

$$K = \frac{-24x^2y^4}{(4x^2y^6 + 9x^4y^4 + 1)^2}, \quad H = \frac{y^3 + 3x^2y - 15x^4y^7}{(4x^2y^6 + 9x^4y^4 + 1)^{3/2}}.$$

So we have $k \leq 0$ and if $(x, y) \neq (0, 0)$ then $K < 0$. Every point of given surface for which $(x, y) \neq (0, 0)$ is hyperbolic.

Example 4. In this example we will study the general case of Cobb-Douglas surface

$$\gamma(x, y) = (x, y, x^m y^n), \quad \text{where } m, n \text{ are constants}, \ m > 0, \ n > 0.$$

Solution. The basis of tangent space can be written in the form

$$\gamma_x = (1, 0, mx^{m-1}y^n), \quad \gamma_y = (0, 1, ny^{n-1}x^m).$$

Function $g_{11}, \ g_{12}, \ g_{22}$ have the form

$$g_{11} = 1 + m^2x^{2m-2}y^{2n}, \quad g_{12} = mn \cdot x^{2m-1}y^{2n-1}, \quad g_{22} = 1 + n^2y^{2n-2}x^{2m}.$$

The unit normal has the form

$$n = \frac{(-mx^{m-1}y^n, \ -ny^{n-1}x^m, \ 1)}{\lambda^{1/2}}$$

where $\lambda = m^2x^{2m-2}y^{2n} + n^2y^{2n-2} \cdot x^{2m} + 1$. Further we have

$$\begin{aligned}
\gamma_{xx} =& (0, 0, m(m-1)x^{m-2}y^n), \\
\gamma_{xy} =& (0, 0, m \cdot nx^{m-1}y^{n-1}), \\
\gamma_{yy} =& (0, 0, n(n-1)y^{n-2}x^m).
\end{aligned}$$

The functions $l_{11}, \ l_{12}, \ l_{22}$ can be written in the form

$$\begin{aligned}
l_{11} =& \frac{m(m-1)x^{m-2}y^n}{\sqrt{\lambda}}, \\
l_{12} =& \frac{m \cdot n \cdot x^{m-1}y^{n-1}}{\sqrt{\lambda}}, \\
l_{22} =& \frac{n(n-1)y^{n-2}x^m}{\sqrt{\lambda}}.
\end{aligned}$$

The Gaussian curvature has the form

$$K = \frac{mn\,[1-(m+n)x^{2m-2}y^{2n-2}]}{(m^2x^{2m-2}y^{2n}+n^2x^{2m}y^{2n-2}+1)^2}.$$

From this formula can be easily seen that following implications are true:

1) $m+n>1 \Rightarrow K \le 0, \quad (x,y) \ne (0,0) \Rightarrow K<0,$
which means that every point $(x,y) \ne (0,0)$ of Cobb-Douglas surface is hyperbolic and principal curvatures k_1 and k_2 have oposite signs.

2) $m+n=1 \Rightarrow K=0,$
which means that every point of Cobb-Douglas surface is parabolic. Exactly one of principal curvatures is zero.

3) $m+n<1 \Rightarrow K \ge 0, \quad (x,y) \ne (0,0) \Rightarrow K>0,$
which means that every point $(x,y) \ne (0,0)$ is eliptic and principal curvatures k_1 and k_2 have the same sign.

The mean curvature can be written in the form

$$H = \frac{m(m-1)x^{m-2}y^n + n(n-1)y^{n-2}x^m - mn(m+n)x^{3m-2}y^{3n-2}}{(m^2x^{2m-2}y^{2n}+n^2x^{2m}y^{2n-2}+1)^{3/2}}.$$

The explicit calculation of principal curvatures k_1 and k_2 is technically a little difficult and so we omit it.

References

1. Bureš, J., Kaňka, M., *Some conditions for a surface in E^4 to be a part of the sphere S^2*, Mathematica Bohemica 1994 No.4, 367-371., 1994.
2. Kaňka, M., *Some Examples of Gaussian Curvature,Mean Curvature and Principal Curvatures of Surfaces in $\mathcal{R}^3$*, International conference AMSE in Trutnov, 2006.
3. Gray, A., *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathemathica*, CRC Press LLC, 1998.
4. Kaňka, M., *An example of basic structure equations for Riemannian Manifolds*, Mundus Symbolicus 1995, 57-62, 1995.
5. Kobayashi, S., Nomizu, K., *Foundations of differential geometry*, New York, 1963.
6. Nomizu, K., *Lie groups and differential geometry*, The mathematical society of Japan, 1956.
7. Sternberg, S., *Lectures on Differential Geometry*, Prentice-Hall,INC., 1964.

Key words generalized Cobb-Douglas surfaces, Gaussian curvature, Mean curvature, Principal curvatures, first and second fundamental forms

Doc. RNDr. Miloš Kaňka, CSc.
Department of Mathematics
University of Economics
W. Churchill Sq. 4
130 67 Prague 3
e-mail: *kanka@vse.cz*

Ing. Eva Kaňková, Ph.D.
Department of Economic Theories
Czech University of Life Sciences Prague
Kamýcká 129
165 21 Praha 6 – Suchdol
e-mail: *kankova@pef.czu.cz*

FIBONACCIHO A LUCASOVA ČÍSLA V APLIKACÍCH - EKONOMIE, UMĚNÍ, ARCHITEKTURA, …

MARTINA ZÁMKOVÁ *)

Abstract:

For centuries, Fibonacci numbers, Golden section and Fibonacci retracement have attracted the attention of mathematicians, economists and philosophers. Step by step, the properties of such objects have been investigated and interesting, sometimes even intriguing, relationships between them discovered. The present text aims to collect the known facts on these notions in the first place and comprehensive manner and pointing out remarkable relationships. In this article, a number of interesting mathematical facts and relationships can be found concerning Fibonacci numbers, Golden section and Fibonacci retracement. Then we can find there some applications into ekonomy, arts or architecture. The text can be theoretical resource for some interesting ekonomic calculations.

Key words:

Fibonacciho Numbers, Lucas Numbers, Golden Section, Leonardo Pisano, Fibonacci Rectangles, Fibonacci Retracement.

1. DEFINICE FIBONACCIHO A LUCASOVY POSLOUPNOSTI

Nejprve připomeňme základní definice Fibonacciho a Lucasových čísel.

Definice 1. Rekurentní formule tvaru

$$f_{n+k} = a_1\, f_{n+k-1} + a_2\, f_{n+k-2} + \ldots + a_k\, f_n,$$

kde a_1, ..., a_k jsou reálná čísla, $a_k \neq 0$, se nazývá *lineární rekurentní formule k-tého řádu s konstantními koeficienty*.

Definice 2. Posloupnost zadanou lineární rekurentní formulí 2. řádu

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad \text{pro } n \in \mathrm{N}, \tag{1}$$

přičemž F_1 = 1 a F_2 = 1, nazveme *posloupnost Fibonacciho čísel* (resp. *Fibonacciho posloupnost*). Členy této posloupnosti se nazývají *Fibonacciho čísla*. Obvykle klademe F_0 = 0.

***Poznámka* 1.** Několik prvních členů Fibonacciho posloupnosti:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, ...

***Poznámka* 2.** Tato čísla se poprvé objevila ve druhém rozšířeném vydání knihy *Liber Abaci* z roku 1228, italského matematika Fibonacciho[‡‡‡], a proto nesou jeho jméno. Poprvé je nazval Fibonacciho čísly francouzský matematik Édouard Lucas[§§§] ve druhé polovině 19. století.

Definice 3. Posloupnost zadanou lineární rekurentní formulí 2. řádu

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n, \quad \text{pro } n \in \mathrm{N}, \tag{2}$$

přičemž L_1 = 1 a L_2 = 3, nazveme *posloupnost Lucasových čísel* (resp. *Lucasova posloupnost*). Členy této posloupnosti se nazývají *Lucasova čísla*. Obvykle klademe L_0 = 2.

‡‡‡ Leonardo Pisánský (1170–1250), italský matematik, znám především pod přezdívkou Fibonacci. Zprostředkoval přenos arabské vědy, shromáždil a uspořádal obrovské množství poznatků, postupů i úloh, čímž přispěl k rozvoji matematického myšlení v Evropě.

§§§ Francois Édouard Anatole Lucas (1842–1891), francouzský matematik, jež je znám především svými výsledky z teorie čísel.

***Poznámka* 3.** Několik prvních členů Lucasovy posloupnosti:

1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 842, ...

2. FIBONACCIHO A LUCASOVA ČÍSLA A ZLATÝ ŘEZ

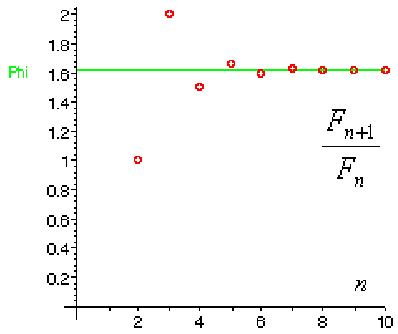
Uvažme podíly dvou po sobě jdoucích čísel Fibonacciho posloupnosti, přičemž vydělíme každé číslo číslem předcházejícím, tj. hledáme čísla $\frac{F_{n+1}}{F_n}$, kde $F_n = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...; n \in \mathrm{N}$. Nalezneme následující posloupnost čísel: $\frac{1}{1} = 1;\ \ \frac{2}{1} = 2;\ \ \frac{3}{2} = 1{,}5;\ \ \frac{5}{3} = 1{,}666...$

$$\frac{8}{5} = 1{,}6;\quad \frac{13}{8} = 1{,}625;\quad \frac{21}{13} = 1{,}61538;\quad \frac{34}{21} = 1{,}619048;\ ...$$

Posloupnost můžeme znázornit graficky, viz obr. 1.

Limita této posloupnosti je rovna hodnotě, kterou nazýváme *zlatým podílem* nebo také *zlatým číslem*, nejčastěji však ***zlatým řezem***. Má hodnotu přibližně 1,618034. Toto iracionální číslo je označováno řeckým písmenem Φ a lze vyjádřit ve tvaru:

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \doteq 1{,}618034...$$



Obr. 1 Grafické znázornění posloupnosti $\frac{F_{n+1}}{F_n}$

Limita této posloupnosti je rovna hodnotě, kterou nazýváme *zlatým podílem* nebo také *zlatým číslem*, nejčastěji však ***zlatým řezem***. Má hodnotu přibližně 1,618034. Toto iracionální číslo je označováno řeckým písmenem Φ a lze vyjádřit ve tvaru: $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \doteq 1{,}618034...$

Označení zavedl americký matematik Mark Barr začátkem 20. století.

Připomeňme, že antický učenec Eukleides (asi 340 př.n.l.– asi 270 př.n.l.), sepsal na tehdejší dobu velkolepé dílo *Základy*, knihu, podle které se studovala geometrie až do konce 19. století. Nalezneme v ní tuto zajímavou úlohu: „*Jak rozdělit danou úsečku na dvě části tak, aby poměr celé úsečky k větší části byl stejný jako poměr větší části k menší.*“ Označíme-li tedy délku dané úsečky *a*, délku její větší části *x*, pak podmínku z úlohy můžeme vyjádřit rovnicí

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}.$$

Odtud po snadné úpravě dostaneme: $x^2 + ax - a^2 = 0.$ (3)

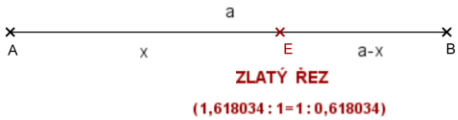
Jelikož hledáme délku větší části úsečky, zajímá nás pouze kladný kořen rovnice (3), který je tvaru

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a, \qquad \text{odkud} \qquad a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}x.$$

Podíl délky celé úsečky k délce její větší části má tedy hodnotu

$$\frac{a}{x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \tag{4}$$

Ukázali jsme, že poměr úseček (4) studovaný Eukleidem je roven číslu Φ.



Obr. 2 Zlatý řez úsečky *AB*

Ve středověku a v období renesance, která se opírala o antickou kulturu, byli matematici tak okouzleni tímto poměrem, že byl nazýván, „božským poměrem“ (latinsky *divina proportio*)****.

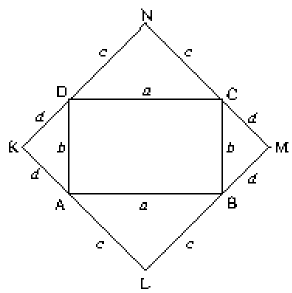
Obdobně je tomu i pro Lucasova čísla. Pokud dělíme dvě po sobě jdoucí čísla Lucasovy posloupnosti, podíl se opět přibližuje zlatému řezu. Platí tedy i tento vztah $\Phi = \lim_{n\to\infty} \frac{L_{n+1}}{L_n}$.

**** Názvů „zlatý řez“ a „zlatý poměr“ se začalo užívat až v 19. století.

3. FIBONACCIHO ČTYŘÚHELNÍKY A ZLATÝ ŘEZ

Uvažme nyní obdélník, jehož delší strana má velikost *a* a kratší strana velikost *b*. Zvolíme-li strany *a*, *b* tak, aby $\frac{a}{b} = \Phi$, nazveme tento obdélník zlatým.

Pro tento zlatý obdélník platí následující zajímavou vlastnost: Vepíšeme-li zlatý obdélník do čtverce, jako na obr. 3, vrcholy obdélníku pak dělí strany čtverce zlatým řezem.



Obr. 3 Zlatý obdélník

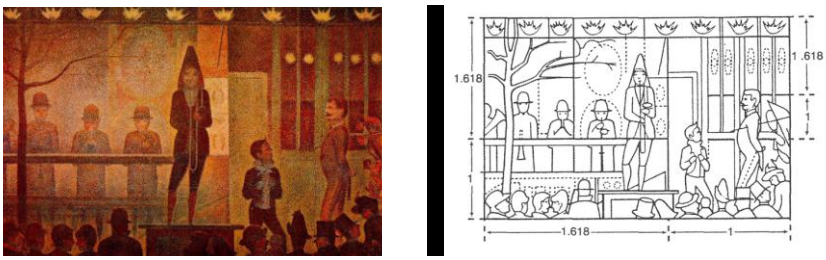
Obr. 4 Svatý Jeroným od Leonarda da Vinciho

Jelikož je zlatý obdélník nejpříjemnějším obdélníkem, nesčetně umělců použilo zlatý obdélník za základ svého díla – Michelangelo Buonarroti, Sandro Botticelli, Salvator Dali, Leonardo da Vinci,[††††]...

Například obraz *Svatý Jeroným* Leonarda da Vinciho zapadá dokonale do zlatého obdélníku, viz obr. 4, a umělečtí historikové věří, že da Vinci vědomě využil techniku malby proporcí, jak to dělali staří řečtí mistři.

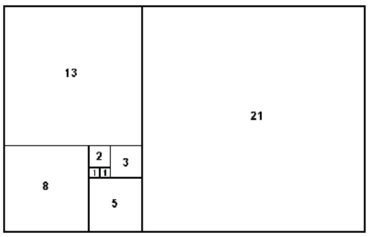
[††††] **Michelangelo Buonarroti** (1475–1564), italský sochař, architekt a malíř.; **Sandro Botticelli** (1445–1510), italský malíř.; **Salvator Dali** (1904–1989), katalánský malíř.; **Leonardo da Vinci** (1452–1519), významný renesanční malíř, sochař, vynálezce a přírodovědec.

Zlaté obdélníky jsou též viditelné v dílech Albrechta Dürera,[‡‡‡‡] předního německého malíře, rytce a sochaře doby renesance. Zlaté obdélníky se objevují také v moderním abstraktním umění, jako např. v díle La Parade, viz obr. 5, francouzského impresionisty Georgese Seurata, o němž se říká, že ke každému plátnu přistupoval s vizí tohoto magického poměru.

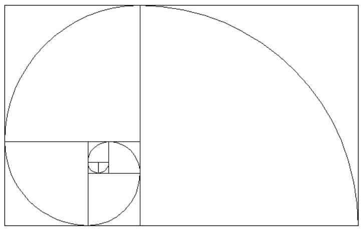


Obr. 5 La Parade od Georgese Seurata

Soubor čtverců, jejichž velikosti stran jsou právě Fibonacciho čísla, nazýváme *Fibonacciho čtyřúhelníky* (obr. 6).



Obr. 6 Fibonacciho čtyřúhelníky



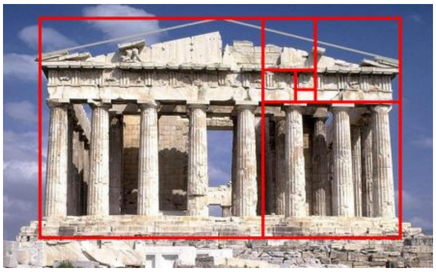
Obr. 7 Zlatá spirála

[‡‡‡‡] **Albrecht Dürer** (1471–1528), německý malíř a grafik, jeden z nejvýznamnějších představitelů renesančního umění.; **Georges Seurat** (1859–1891), francouzský malíř.

Každý nový čtverec má délku strany odpovídající součtu velikostí stran dvou posledních čtverců.

Spirálu tvořenou čtvrtinami kružnic a zakreslenou do Fibonacciho čtyřúhelníků způsobem znázorněným na obr. 7 nazýváme *zlatá spirála*. Zlatá spirála je tedy vepisována do obdélníků, jejichž poměry stran se blíží zlatému řezu. Můžeme ji nalézt na mnoha místech v přírodě – ve tvaru ulit měkkýšů, v uspořádání semen kvetoucích rostlin, ve tvaru galaxií, ...

Zlatý řez dále nalézá své uplatnění např. v umění, v architektuře, ... Nejčastěji se připomíná členění Parthenonu na Akropoli v Aténách, které vytvořil známý sochař Feides (kolem roku 500 př.n.l.). Tam dělí sloupy celkovou výšku ve zlatém řezu, tedy poměr celé výšky k výšce sloupů se blíží Φ a stejný je i poměr šířky a výšky stavby. Jak celý tvar paláce zapadá do zlatého obdélníku lze sledovat na obr. 8.



Obr. 8 Fibonacciho čtyřúhelníky a Parthenon, Athény

Zlatý řez byl samozřejmě využit i při mnoha dalších stavbách, zmiňme např. Pařížský chrám Notre Dame. Hojně je rovněž využit na katedrále v Chartres ve Francii a při mnoha dalších stavbách. V moderní architektuře užíval hojně zlatý řez Le Corbusier.[§§§§]

[§§§§] Le Corbusier (1887–1965), vlastním jménem Charles Edouard Jeanneret-Gris, švýcarsko-francouzský architekt, designér a výtvarník.

4. FIBONACCIHO ČÍSLA A FIBONACCI RETRACEMENT

Fibonacciho čísla můžeme nalézt také v ekonomii. Na finančních trzích se hojně používá tzv. metoda Fibonacci. Je velmi oblíbená u profesionálních traderů k odhadu cen. Ze všech různých trhů je nejhojněji používána na měnovém trhu – Forexu. Mnohdy je až neuvěřitelné, jak se ceny přesně zastavují právě na Fibonacciho hodnotách. Jedná se o velmi kvalitní metodu, kterou bych doporučovala každému prostudovat, pokud se chce zajímat o obchodování na finančních trzích.

4.1. Jak se metoda Fibonacci používá v praxi?

Nejpoužívanější Fibonacciho metoda se nazývá **Fibonacci retracement (Fibonacciho úrovně zpětných pohybů)**. Tento nástroj se odvozuje z podílových ukazatelů. Odvozují se následujícím způsobem. Vezměme 4 po sobě jdoucí Fibonacciho čísla jako např. 13, 21, 34, 55 a vydělením jednoho čísla druhým dostaneme podílové ukazatele:

13/21 = 0,618 34/21 = 1,618 21/55 = 0,382

34/55 = 0,618 55/34 = 1,618 13/34 = 0,382

V praxi nemusíme tyto podíly počítat, protože každá obchodní platforma má již Fibonacci retracement zabudován. My pouze tento nástroj aplikujete na daný finanční trh nebo instrument. Tedy Fibonacciho retracement má většina obchodních platforem zabudován ve svých analytických nástrojích a nám stačí pouze vyznačit **dno** a **vrchol** významného pohybu nebo trendu a ostatní úrovně se již automaticky zakreslí do grafu.

Při obchodování na trhu Forex jsou klíčové tyto Fibonacciho úrovně:

- 0,382 => 32,2 %;
- 0,5 => 50,0 %;
- 0,618 => 61,8 %;
- 0,786 => 78,6 %;
- 1,27 => 127,0 %;
- 1,618 => 161,8 %;
- 2,618 => 261,8 %;

Za nejsilnější Fibonacciho hodnoty jsou považovány čísla **38,2 %**; **50 %**; **61,8 %**. Jsou to v podstatě velmi silné **support** (hranice podpory) a **rezistence** (hranice odporu) úrovně, od kterých se trh odráží nebo mění trend. Tedy využití v praktickém obchodování je mnoho. Velmi oblíbené jsou např. při určování tzv. profit targetů. Což znamená určování, kam až by cena mohla dojít a určit tak její cíl a na tomto pohybu profitovat.

Hlavní myšlenka je tedy předpoklad, že trhy mají po významném pádu nebo nárůstu tendenci vracet se do předem předvídatelných úrovní (Fibonacciho hodnot). Jde o to, že každý trend, vždy koriguje své pohyby a ty se mohou odehrávat právě na těchto Fibonacciho číslech.

Na grafu (obr. 9) je použití Fibonacci retracement v praxi. Jedná se o aplikaci na měnový pár USD/JPY (americký dolar vůči japonskému jenu). Z grafu můžeme vidět, že se cena odráží od hladiny 50 %, následně ji proráží až na úroveň 61,8 %, kde se opět zastavuje a odráží. Hodnota rezistence 61,8 % se pro cenu stala nepřekonatelnou překážkou a vrací se zpět na úroveň 38,2 %.

Obr. 9 Fibonacci Retracement USD/JPY I.

Další praktický příklad použití Fibonacci retracement na denním grafu USD/JPY viz obr. 10. Zde můžeme vidět, jak trh ignoroval hranici 38,2 %, tuto hranici prorazil a pokračoval až k 50 % Fibonacci a odtud se odrazil a pokračoval dále v rostoucím trendu.

Obr. 10 Fibonacci Retracement USD/JPY II.

Obchodník předem nemůže v žádném případě odhadnout budoucí vývoj instrumentu, ale pokud má tušení o blížícím se Fibonacciho retracementu, může této skutečnosti přizpůsobit své chování.

Dalších zajímavých souvislostí a aplikací Fibonacciho a Lucasových čísel existuje celá řada, ale o nich snad někdy příště.

LITERATURA

[1] Hartman, O.: *Fibonacci Retracement: Jak používat tuto metodu?* [onlile]. c2009 - 2010, [cit. 2010-18-10]. <http://www.fxstreet.cz/fibonacci-retracement-jak-pouzivat-tuto-metodu.html>.

[2] Hejl, J.: *Zlatý řez*. Učitel matematiky *4*, č. 1, 1995, 1 - 8.

[3] Hoggatt, V. E. Jr.: *Fibonacci and Lucas Numbers*. Houghton Mifflin Company, Boston, 1969.

[4] Koshy, T.: *Fibonacci and Lucas numbers with applications*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 2001.

[5] Tupý, J.: *Fibonacci retracement: Užitečná pomůcka prevence rizika*. c2006 - 2010. [cit. 2010-20-10].

<http://www.investujeme.cz/clanky/fibonacci-retracement-uzitecna-pomucka-prevence-rizika/>.

[6] Vorobiev, N. N.: *Fibonacci Numbers*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2002.

THE ROLE OF FOREIGN LANGUAGES IN THE MODERN INFORMATION SOCIETY

MARTINA BENEŠOVÁ[*****], MILOSLAV REITERMAN[**]

Abstract

In the modern information society, where there is plenty of information and its sources flooding not only learners, but the whole society, it is fatal to be able to be versed in gaining and processing information. The problem which the students must learn to face is the fact that most needed information sources are available in foreign languages. Thus, the concept of professional English language teaching has been born in the field of study Finance and Management at VSPJ. It has proved necessary and reasonable to link the students' knowledge of basic economics, mathematics and their ability to express themselves in the English language.

Keywords

Information society, looking up information, professional English language teaching, interdisciplinary relations, English language in mathematics and economics.

INTRODUCTION

In the modern information society, where there is plenty of information and its sources flooding not only learners, but the whole society, it is fatal to gain a brand new skill: the aggregate of looking up the

[*****] Mgr. Martina Benešová, The Department of Languages, The College of Polytechnics Jihlava, Tolstého 16, 586 01 Jihlava, tel. number: +420 567 141 185, e-mail address: benesova@vspj.cz

[**] Ing.Miloslav Reiterman, The Department of Languages, The College of Polytechnics Jihlava, Tolstého 16, 586 01 Jihlava, tel. number: +420 567 141 183, e-mail address: reiterman@vspj.cz

information, going through the sources, analysing, assessing and applying it. The problem which the students must learn to face is the fact that most needed information sources are available in foreign languages. For the above mentioned, the traditional old system of professional language teaching based on using traditional language textbooks turned out far inefficient and insufficient. Traditional professional language textbooks are created so that they make the learner familiar only with the twisted reality of simplified, unreal texts which do not and cannot prepare the learner for the encounter with and filtering the particular needed information diffused in long texts of one or more sources.

Hence, the concept of professional English teaching in the field of study of Finance and Management at the College of Polytechnics Jihlava (VSPJ) has been adapted to reflect the requirement of the modern knowledge society. The concept was born on the base of the cooperation between the Department of Economic Studies and the Department of Languages.

In accordance with the new concept of professional English language courses taught, it has proved necessary and reasonable to link the students' knowledge of basic economics, mathematics and their ability to express themselves in the English language. With this respect the most important areas of mathematics used in professional economic English language courses are as follows: graph literacy (types, description – axes, variables and their units, understanding what the graph exactly depicts, graphs of equations, of inequalities and of their systems, movement along the curve vs. shift of the curve, tangent, extremes of the curve, slope vs. steepness) and mathematics of finance (reading, understanding and applying basic formulas in the context of stock market). Naturally, it is vital to teach and train reading mathematical symbols and operations in English. The students are provided the study material introducing the way of reading and pronouncing some of these mathematical symbols, expressions and operations.

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Vysoká škola polytechnická Jihlava
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

1 GRAPH LITERACY

1.1 TYPES OF GRAPHS

At the very beginning of the course students have to be provided with the brief overview of graphs and their properties which they encounter during the course. Students are required to be able to name the type of the graph, describe it and enunciate the cases of the suitable use. The fundamental types of graphs introduced to students are:

Line charts and *scatter diagrams* (being two of the most used graphs); *time series*; d*iagrams with more than one curve* (showing two or more different relationships simultaneously); *bar charts* and *histograms* (the differences between the two of them are highlighted in the course with the special emphasis on the advantage of the histogram which does not only clearly show the largest and smallest categories but gives an immediate impression of the frequency distribution of data and is one of the most common formats for representing statistical data, cf. Fig. 1 and 2);

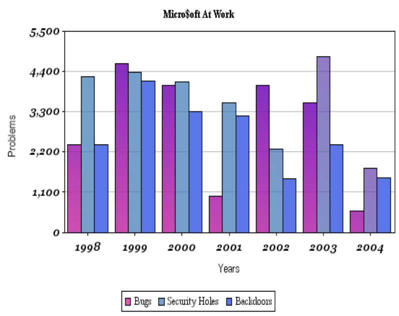


Figure 1: The bar chart

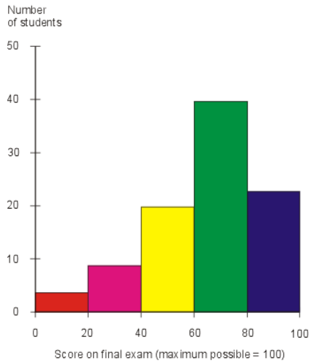


Figure 2: The histogram

pie charts with their variants of *polar area diagrams* (being similar to pie charts, except that the slices are each of an equal angle, and differ in how far they extend from the centre of the circle); *timeline charts; organizational charts; treemaps/tree charts; flow charts; area charts; cartograms* (being special maps in which some thematic mapping variable – such as *GNP* – is substituted for a land area or distance; the geometry or space of the map are distorted in order to convey the information of this alternate variable, cf. Fig. 3).

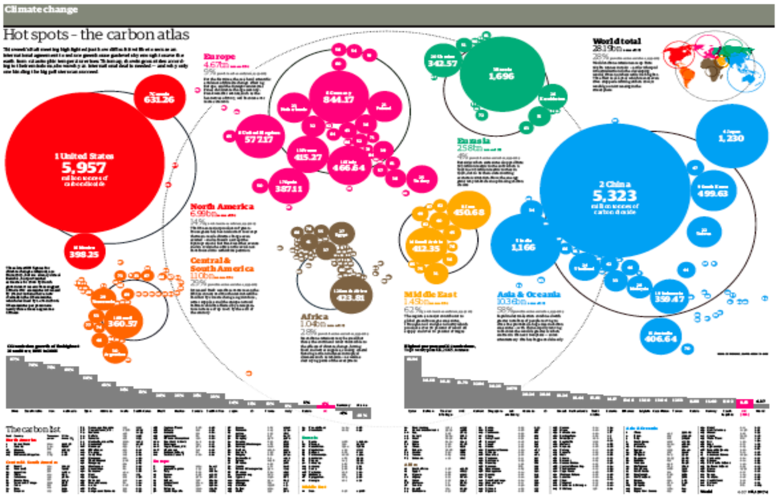
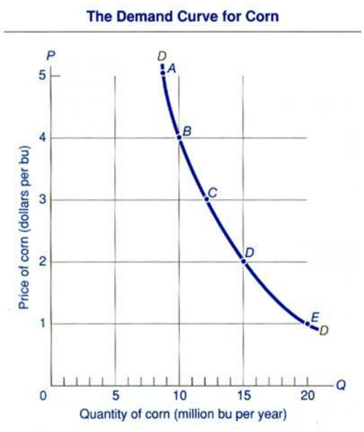


Figure 3: A cartogram

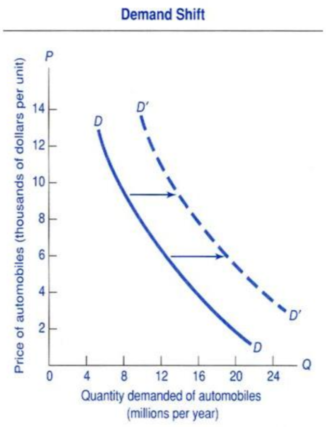
1.2 GRAPH PROPERTIES

As was already mentioned above, the students have to be able to describe the graph, i.e. to name its axes, to understand used variables and their units, to understand which function the graph exactly depicts and how it was plotted; the students are shown graphs of equations, of inequalities and of their systems. Together with the above mentioned, the students are strictly led to differentiate the movement along the curve and the shift of the curve (cf. Fig. 4).

One of the first examples of practical application of this knowledge is the moving along and the shift of the production-possibility frontier (PPF). Not only the knowledge of graph properties, but above all the interpretation (in the quoted courses, the economic interpretation, in particular) is stressed. Let the students suppose the PPF in Fig. 5. At point D society chooses to produce 30 units of food and 90 units of machines. If the society decides to consume more food with a given PPF, then it has to move along the PPF to e.g. point E. This movement along the curve represents choosing more food and fewer machines at the given conditions.



(a)



(b)

Figure 4 (a): A downward-sloping demand curve relates quantity demanded to price. [1] When the price of corn decreases from $4 per bu to $2 per bu, the quantity demanded increases from 10 m bushels to 15 m bushels. In the graph this change is illustrated by the movement along the curve from the point *B* to *D*.

Figure 4 (b): Increase in demand for automobiles. [1] When some the external factors (average income, the size of population, prices of related goods, tastes etc.) change, the demand itself changes, which is illustrated by the shift of the curve in the graph.

Let the students suppose that this PPF in Fig. 5 represents society's production possibilities in 2010. If we return to the same country in 2020, we see that the PPF has shifted from the 2010 curve to the 2020 curve. (This shift would occur e.g. because of technological changes or because of an increase in labour or capital available.) In the later year, society might choose to be at point G, with more food and machines than at either D or E.

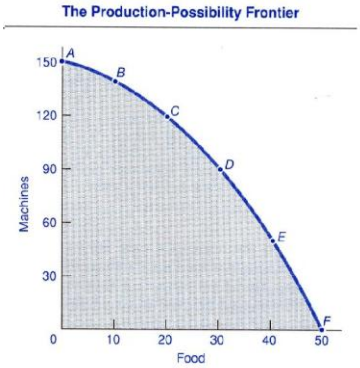


Figure 5: The production-possibility frontier [1]

The hatched area in the graph in Fig. 5 can serve as an example of the graphic solution of the system of inequalities. In our example situation there are three of them, where two of them are obviously $x \geq 0, y \geq 0$, which means that the area is situated in the first quadrant of the graph. The points inside the PPF (being the solution of the system of inequalities) represent unemployed resources; those points together with the frontier form the area of feasibility; those outside the PPF are unattainable or infeasible. The PPF is a graphical representation of an equation, and its points show the most efficient production with all the resources employed.

1.3 CALCULATIONS RELATED TO GRAPHS

When the students go through the course, they meet many situations when they are in need to calculate the change at a given point, e.g. when talking about the marginal propensity to consume or save. It is, then, necessary to acquaint the students with how to get the slope of a tangent line to the curve (representing the change) at a given point. Apart from using the calculation of the tangent slope with the use of the right-angled triangle, it proves efficient to draw the students' attention to applying derivatives, which are, sadly, not always mentioned in the economic literature (cf. [1]). The students are reminded that the gradient (slope) of a curve at any point is the gradient of the tangent line to the curve at that point. The gradient function is often called the derived function, or derivative.

Example 1: The students are asked to find the derivative of the function $f(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 7$ at the point $A[1, ?]$.

$$f(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 7$$

$$f'(x) = 3x^2 + 10x + 3$$

$$f'(1) = 3 \,.\, 1^2 + 10 \,.\, 1^2 + 3 = 16$$

The tangent is a straight line; i.e. it can be noted as *y* = *kx* + *q*, where *k* is the slope (gradient) of the tangent and *q* is its intersection with the y-axis. The slope (gradient) can be calculated as a derivative of the function at a given point.

Example 2: The students are asked to find the tangent to the curve given as the function at the point $A[1, ?]$.

The students know from the previous exercise that the derivative of the function at the point A is $f'(1) = 16$.

It means that the slope of the tangent to the curve at the point A is

$$k = 16;$$

i.e. the tangent can be noted as $y = 16x + q$.

The students know that the tangent passes through the point A as well; i.e. A belongs to the set of its points, so the students can substitute the coordinates of A to the notation of the tangent.

$$2 = 16 \,.1 + q$$

$$q = -14$$

It implies that the notation of the tangent to the given curve at the point A is

$$y = 16x - 14.$$

Many curves in economics first rise, then reach a maximum, then fall. In the rising region the slope is positive, in the falling region the slope is negative. At the curve’s maximum and minimum the slope is zero.

Let the students consider a parabola with the general equation of the form $f(x) = ax^2 + bx + c$. When *a* is positive, the students get a curve like a valley; when *a* is negative, the students get a curve like a mountain top.

If the students allow their eyes to travel along the curve of a parabola from left to right (the direction in which *x* increases), they notice that in passing through its maximum/minimum, where *y* has the greatest/lowest value, the gradient is zero and is changing sign from positive to negative/negative to positive. This distinction enables them to investigate the highest and the lowest point on a parabola without going to the length of plotting the curve in detail.

Example 3: Find the greatest or least value of *y* on the curve $y = 4x - x^2$. Plot the curve.

$$y = 4x - x^2$$

$$f'(x) = 4 - 2x$$

$$f'(x) = 2(2 - x)$$

The gradient is zero when

$$2(2 - x) = 0$$

$$x = 2.$$

By substituting *x* = 2 to the original function the students get the *y*-coordinate of the point.

$$y = 4.2 - 2^2 = 4$$

At any point where the gradient of a curve is zero, *y* is said to have a stationary value; thus the point [2, 4] is called a stationary point; a point which is suspicious of being an extreme.

The students must now investigate the sign of the gradient on either side of the point [2, 4] to discover whether it is the highest or lowest point on the curve.

Just to the left of [2, 4], *x* is just less than 2, and $f'(x)$ is positive.

Just to the right of [2, 4], *x* is just greater than 2, and $f'(x)$ is negative.

Thus, the given function has in the point x = 2 its maximum, with the value y = 4.

1.4 EXAMPLE OF OTHER FIELDS OF MATHEMATICS TOUCHED

When going through topics connected with finance and stock markets with the students, rudiments of mathematics of finance are touched as well. The students are, for example, asked to understand and describe the most common types of securities, stocks and bonds, to be able to read and to analyse formulas for calculating some of their properties, i.e. the present value, the future value, the bond duration, the yield to maturity, coupon payments.

For example the students should be able to read and to describe the following formula of the present value of a common stock. Common stocks do not have a fixed maturity; their cash payments consist of an indefinite stream of dividends. Therefore, the present value of a common stock is

$$PV = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{DIV_t}{(1+r)^t}$$

PV present value of a common stock, t payment periods, r the discount rate.

It is pointed out that this discounted-cash-flow (DCF) formula for the present value of a stock is just the same as it is for the present value of any other asset. The students just discount the cash flows – in this case the dividend stream – by the return that can be earned in the capital market on securities of equivalent risk. [2]

CONCLUSION

The new concept of professional English teaching described above is the result of the efforts for interdisciplinary relations at VSPJ in practice. The aim of such courses is, of course, not to teach the particular disciplines of economics and mathematics, but to encourage the students to use English professional sources and to make them feel confident. If the students were not given the chance of applying their vocational knowledge via the English language, they would stay insulated from huge amount of information sources and could not succeed in their professional life.

As a Chinese proverb says, a picture is worth a thousand words. Before the students can master economics, they must have working knowledge of graphs. Graphs are an essential tool of modern economics. They provide a convenient presentation of data or of the relationship between two variables. This is the reason why the topic of graphs engages so much space in the course described above comparing to other mathematical areas highlighted. Apropos, graphs are an integral part of most expert presentations which the students are required to be able to prepare and will be expected to perform in their professional life.

All the mathematical examples and exercises used in this paper are gone through with the students in the professional English courses of the Finance and Management at VSPJ described in this paper.

LITERATURE

[1] SAMUELSON, P.A., NORDHAUS, W.D. *Economics*. 18th edition. Boston : McGraw-Hill, 2005. ISBN 0-07-28725-5.

[2] BREALEY, Richard A.; MYERS, Steward C.; ALLEN, Franklin. *Principles of Corporate Finance*. New York : McGraw-Hill, 2008. 976 s. ISBN 9780073405100.

[3] REKTORYS, Karel, et al. *Survey of Applicable Mathematics*. Cambridge, Massachusetts : The M.I.T. Press, 1969. 1369 s. ISBN 6825586.

MATEMATICKÉ METODY OPERAČNÍHO MANAGMENTU – VÝUKA A PRAXE

ANNA ČERNÁ [1*)]

Abstrakt.

Autorka, jako garant povinného předmětu 6. semestru Fakulty managementu VŠE v Jindřichově Hradci „Metody operačního managementu“, nastiňuje jeho rozsah a obsah jak v současnosti, tak i v perspektivách chystané inovace studia. Zdůrazňuje matematický základ, na kterém staví a vyjmenovává hlavní matematické disciplíny, o které se opírá. Na doplnění uvádí příklady toho, jak mohou matematické modely a metody pomoci v upevňování ekonomického pilíře udržitelného rozvoje dopravy.

Klíčová slova (keywords):

Dopravní síť, matematický model, metoda, náklady, operační management, optimalizace, teorie grafů.

ÚVOD

Moderní teorie managementu se člení na řadu speciálních disciplin, jejichž názvy mají buď tvar ⟨přídavné jméno + management⟩, například personální management, strategický management, krizový management, anebo je to ⟨management + podstatné jméno v genitivu⟩, jako je management změny, management jakosti (resp. kvality), management dopravy apod. Za jednu z nejvýznamnějších z nich se všeobecně považuje ***Operační management*** (zkráceně OM), měně často (byť možná výstižněji) nazývaný též ***management operací***.

[1*)] Doc. Ing. Anna Černá, CSc., Fakulta managementu Vysoké školy ekonomické, Jarošovská 1117/II, 37701 Jindřichův Hradec, tel. 384417211, e-mail cerna@fm.vse.cz

Základním předmětem studia teorie OM je ***operace***, tj. činnost (člověka nebo stroje), vedoucí k ***transformaci*** nějakého ***objektu*** (v anglicky psané literatuře někdy též nazývaného „zákazník“, což v češtině není moc vhodné, může vést k nedorozuměním). Toto zaměření je velmi obecné, dokonce lze říci, že z hlediska podpory řešení manažerských rozhodovacích problémů téměř univerzální. Jen stěží najdeme manažerské rozhodování, jehož cílem není dosáhnout nějakou změnu. Cílový stav této změny by měl být ve smyslu nějakého kritéria lepší, přičemž v praxi silně převládají ***kritéria ekonomická***. Velmi často se jedná o ***minimalizaci nákladů***, ať přímých, snadno finančně vyjádřitelných, nebo nepřímých či zobecněných.

Má-li manažer ***optimálně***, tj. nejlepším možným způsobem podle zvoleného kritéria (nebo více kritérií), naplánovat, zorganizovat nebo operativně řídit nějaká operace, neobejde se bez využití ***matematického modelu*** a exaktní ***metody***, která optimální řešení najde, nebo alespoň (u rozsáhlých úloh) metody heuristické, která vede k přijatelnému řešení. Tomu odpovídá i výuka OM na Fakultě managementu VŠE (dále zkráceně FM).

1 VÝUKA OPERAČNÍHO MANAGEMENTU NA FM VŠE

V současnosti je OM rozdělen do dvou povinných jednosemestrálních předmětů. V 5. semestru se vyučují „***Základy operačního managementu***“. Seznámí studenty s typickými okruhy, jako jsou např.:

- řízení jakosti,
- management skladů a zásob,
- logistické řetězce,
- problémy výměny a obnovy strojů a zařízení,
- systémy hromadné obsluhy,
- problémy produkčních plánů,

- problémy rozvrhů
    - prostorových vnitřních (angl. layout),
    - prostorových vnějších (angl. location),
    - nasazování strojů a pracovníků.

Ve srovnání s běžnými zahraničními učebnicemi, jako je např. rozsáhlá kniha J. Heizera a B. Rendera (2010), zde chybí prognostika (angl. forecasting), který se na FM učí v analýze dat. Garantem předmětu je doc. Jan Voráček.

V 6. semestru navazují „Metody operačního managementu“, garantované autorkou, v nichž se výše uvedené problémy řeší pomocí matematických metod:

- teorie grafů (cesty, sítě, CPM a PERT, okružní úlohy, centra a mediány v prostorovém rozvrhování, toky v sítích apod.),
- lineárního programování (výrobní plán, dělení materiálu, optimalizace strojního parku apod.),
- dynamického programování (např. rozdělení produkce do časových období),
- vázaných extrémů (např. optimalizace objednaného množství a času dodávky),
- optimalizace výrobních rozvrhů (např. problémy Flow Shop a Job Shop).

V tomto předmětu je kladen velký důraz na správnou verbální formulaci problému a následné vytvoření správného matematického modelu. Rovněž se vyžaduje, aby studenti uměli zvolit správnou metodu řešení. Netrvá se na tom, aby všechno uměli vypočítat ručně, pokud mají k dispozici vhodný software a umějí do něj problém vložit. Kromě již zmíněné americké učebnice J. Heizera a B. Rendera (2010) používáme i českou knihu A. Černé (2008).

Takto se na FM bude vyučovat OM ještě nejméně 3 roky. Potom se uvažuje o možné inovaci, kdy by byl jeden povinný jednosemestrální předmět „Management operací“, prezentující nejdůležitější problémy a metody, garantovaný autorkou a jeden navazující volitelný „Operační management, procesy a dodavatelské řetězce“, prohlubující vybrané problematiky a garantovaný doc. Voráčkem.

V následující kapitole si ukážeme některé praktické aplikace matematických metod operačního managementu.

2 EKONOMICKY UDRŽITELNÝ ROZVOJ DOPRAVY

Problematika udržitelného rozvoje lidstva se intenzivně studuje už cca 30 let. Nejdříve se zdůrazňovaly zejména aspekty životního prostředí, čili ***ekologické***, ve snaze zajistit lidem čistou vodu, vzduch, nezničenou přírodu apod. Potom přišly na řadu otázky ***sociální***, např. zajištění slušného bydlení a mobility (do školy nebo práce, k lékaři, na úřad apod.). Pak se však ukázaly problémy ***ekonomické*** s „ufinancováním“ ekologických a sociálních opatření udržitelného rozvoje. Proto se nastoluje problém ***harmonizace*** ekologického, sociálního a ekonomického ***pilíře udržitelného rozvoje***.

Tyto vztahy se týkají i dopravy, a to ve dvou směrech. Na jedné straně i ona musí hledět toho, aby co nejpevněji stála na uvedených třech pilířích, na druhé straně od ní závisí pevnost sociálního pilíře obecně. Mobilita se zatím bez dopravy plně zajistit nedá.

Významnou roli tu hraje veřejná doprava. Její specifikum je v tom, že jejímu pilíři ekologickému se nemusí věnovat velká pozornost, protože každý cestující, který si ji zvolí místo jízdy vlastním autem, šetří životní prostředí. Proto do popředí vystupují otázky ***harmonizace pilíře sociálního*** (představovaného zejména dostupností pro cestující) s ***pilířem ekonomickým***.

2.1 ANULAČNÍ SPIRÁLY VE VEŘEJNÉ DOPRAVĚ

Málokterý segment veřejné dopravy je rentabilní v tom smyslu, že by jeho výnosy (hlavně z jízdného) převýšily jeho náklady. Skoro vždy jsou výnosy menší a musí se najít někdo, kdo tento rozdíl dotuje. Někdy jsou to podniky, dotující cestování svých zaměstnanců do práce, ale ve velké většině případů je to veřejná správa. Tak např. MHD dotuje město, příměstskou dopravu kraj.

Dotace do veřejné dopravy však znamenají značnou zátěž pro rozpočet. Proto se z času na čas pustí odpovědní pracovníci po jedné ze dvou lákavých, ale nesprávným směrem vedoucích cest:

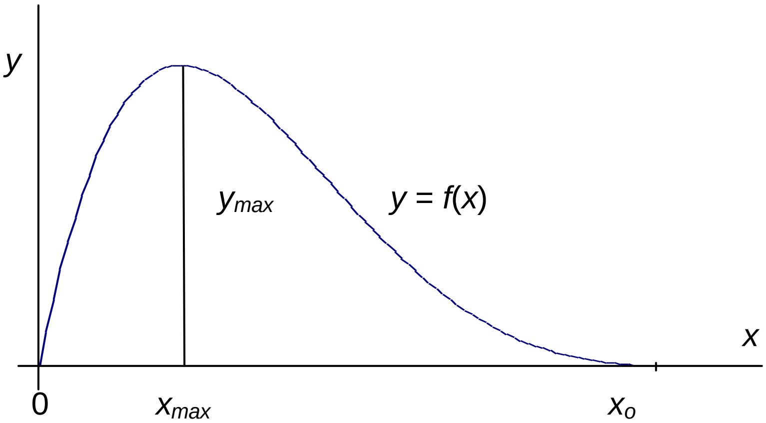
C1 – výrazné zvýšení jízdného,

C2 – rušení málo vytížených spojů.

Nikdo z těch, co prosazují opatření C1 si asi neuvědomují Weierstrassovu větu, že každá spojitá funkce jedné proměnné na uzavřeném intervalu tam nabývá svého maxima.

Označíme-li x cenu jízdného na 1 km a $y = f(x)$ celkové tržby za časovou jednotku (např. rok), tak můžeme směle předpokládat, že f je spojitá funkce, $f(0) = 0$ a rovněž $f(x_o) = 0$ pro nějaké hodně vysoké jízdné x_o. Takových hodnot x_o je zřejmě nekonečně mnoho, pokud si však zvolíme jejich infimum, můžeme předpokládat, že uvnitř intervalu $\langle 0; x_o \rangle$ je funkce f kladná.

Vzhledem k tomu, že veřejná doprava má snadno dostupný substitut dopravy individuální, je namístě předpokládat tvar funkce f jako na Obr. 1, tj. že je unimodální s bodem maxima x_{max} podstatně blíž k 0 než k x_o a dále, že je konkávní v celém intervalu $\langle 0; x_{max} \rangle$, protože zvýšení cestovného část dosavadních cestujících přiměje k volbě individuální přepravy.



Obr. 1. Závislost tržeb na jízdném

Konkrétní hodnoty x_o a x_{max} pro dané město nebo kraj nejsou obvykle známé, protože není k dispozici dostatek dat. Přesto lze očekávat, že v mnoha případech současné jízdné x už je větší, než x_{max} a tedy zvýšením jízdného může dojít k poklesu celkových tržeb. Ale i tam, kde zatím $x < x_{max}$ z konkavity funkce f plyne, že při zvýšení jízdného o p% stoupnou tržby o mnohem méně procent (cestujících ubude).

Tento vývoj odpovědné pracovníky obvykle překvapí, dále zvýší jízdné, ubudou další cestující a roztáčí se ***anulační spirála poptávky***.

Zrádnost cesty C2 (rušení málo vytížených spojů) je založena na tom, že tímto opatřením jednak trochu poklesne dostupnost veřejné dopravy (někdo těmi spoji přece jezdil) a jednak nemusí vůbec poklesnout rozdíl mezi náklady a tržbami, protože poklesnou jen náklady na spotřebovanou energii a o stejnou sumu mohou poklesnout tržby. To může vést k rušení dalších spojů a roztáčí se ***anulační spirály nabídky***.

Jak jsme ukázali, obě cesty C1 a C2 sotva mohou znamenat posílení ekonomického pilíře udržitelného rozvoje dopravy, ale zato téměř jistě poškodí pilíř sociální snížením její časové a finanční dostupnosti.

Jak ale tedy jinak přivřít stále se rozvírající nůžky mezi stagnujícími (ba někdy i klesajícími) tržbami z jízdného a rostoucími náklady? Pomineme-li sice nadějnou, ale dosti nejistou cestu moderního marketingu, jenž by možná mohl dosáhnout zvýšení podílu veřejné dopravy na přepravním trhu a tím i zvýšení tržeb z jízdného, zbývá nám cesta mnohem jistější. Vede přes minimalizaci nákladů využitím ***matematických optimalizačních metod***. V dalších podkapitolách si uvedeme některé zajímavé ukázky.

2.2 OPTIMALIZACE TURNUSŮ AUTOBUSŮ V PŘÍMĚSTSKÉ DOPRAVĚ

Nejdříve si popíšeme základní optimalizační problém, spočívající v minimalizaci potřebného počtu vozidel kapacitně homogenního parku (tj. u všech autobusů se předpokládá zhruba stejný počet míst a tedy jejich vzájemná zaměnitelnost při nasazování na spoje). Přitom se nepředpokládá žádná redukce množiny spojů. Tato úloha má pro snížení nákladů velký význam, úspora jednoho vozidla představuje cca 1 mil. Kč za rok na fixních a mzdových nákladech. Podle zkušenosti autorky je takto možné docílit úspory 5-10% nákladů na provoz příměstské autobusové dopravy.

Daná je ***množina spojů*** $S = \{1, ..., n\}$ a na ní ***relace následnosti*** „$\rightarrow$“. Vztah $i \rightarrow j$ pro $i, j \in S$ platí právě tehdy, když v tomtéž dnu může totéž vozidlo obsloužit nejdříve spoj i a pak spoj j. ***Turnusem*** nazýváme posloupnost $\tau = i_{\tau,1}, i_{\tau,2}, ..., i_{\tau,m(\tau)}$, kde $i_{\tau,k} \in S$, $k = 1, ..., m(\tau)$ a $i_{\tau,k} \rightarrow i_{\tau,k+1}$, $k = 1, ..., m(\tau) - 1$. ***Úlohou*** je najít takovou množinu turnusů T aby každý spoj $i \in S$ patřil aspoň do jednoho turnusu $\tau \in T$.

Řešení tohoto problému je možné několika způsoby, které jsou popsány například v knize A. Černé a J. Černého (2004), podkapitole 14.2. Jeden využívá bipartitního grafu $G = (S \times S', H)$ kde množina S' $= \{i' : i \in S)$ je vlastně duplikátem množiny S a vztah $h = (i, j') \in H$ platí právě když $i \rightarrow j$. Maximální spáření $H^* \subset H$ potom jedno-jednoznačně definuje množinu T takto:

- Ty spoje $j \in S$, které se nenacházejí mezi počátečními vrcholy množiny H^*, jsou koncovými spoji turnusů (a těch je právě tolik, kolik je takových vrcholů).

- Je-li j koncovým spojem nějakého turnusu a $(i, j) \in H^*$, potom dvojice i, j představuje poslední dva spoje některého turnusu.

- Atd. Takto lze turnusy prodlužovat, pokud zatím první spoj má ještě nějakého předchůdce v H^*.

Poznámka 1. Toto není jediná možnost, jak využít modely teorie grafů při minimalizaci počtu turnusů. S. Palúch (1988) definoval orientovaný graf $G = (S, H)$ kde $h = (i, j) \in H$ platí právě když $i \rightarrow j$. Každá cesta na tomto grafu představuje turnus a úlohou je tedy pokrýt graf G minimálním počtem cest. Na to S. Palúch využil algoritmus, jehož autorem je K. Vašek ze Žiliny (ale časopisecky, ani knižně jej nepublikoval, jen v interních výzkumných zprávách Výzkumného ústavu dopravního). Tento postup umožňuje zjistit nejen minimální potřebný počet turnusů $|T|$, ale i vyjmenovat ty turnusy-„viníky“, které , kdyby se vyřadily, stačilo by $|T| - 1$ turnusů.

Poznámka 2. Někdy se úloha modifikuje tak, že hledáme množinu turnusů, minimalizující náklady nejen na počet turnusů, ale i na přejezdy naprázdno mezi spoji. Oba zmíněné algoritmy (mimochodem exaktní, ne jen heuristické), tj. jak využití maximálního spáření v bipartitním grafu, tak pokrývání orientovaného grafu cestami, lze snadno přizpůsobit na takovouto formulaci. Tato úprava může zvýšit úspory nákladů až o dalších 5%.

Poznámka 3. Jsou však další modifikace, které už nelze řešit exaktními metodami. Jedná se o některé další omezující podmínky, např. povinná přestávka řidičů na odpočinek, nebo jídlo, ukončení turnusu ve stejném uzlu, jak začínal apod. Může se rovněž uvažovat heterogenní park o vozidlech s různou kapacitou míst pro cestující a žádat doplnění účelové funkce o požadavek využití co nejmenších vozidel. V tom případě se využívá „krosovací“ heuristika. Vezmou se turnusy, vypočítané exaktními metodami bez zahrnutí těchto doplňkových požadavků a potom se se všemi dvojicemi turnusů zkouší překřížení buď jednoduché (Obr. 2), nebo dvojité (Obr. 3).

Velkým přínosem je zejména zavedení heterogenního parku vozidel, zahrnující např. tzv, „minibusy“ (pro 10-30 sedících nebo i stojících cestujících), „midibusy“ (pro 30-60), „standardní autobusy (60-110) a kloubové autobusy (nad 110), Po využití krosovací heuristiky lze dosáhnout další úspory cca 5-10%.

$$\tau_1 = \text{spoj} \rightarrow \text{spoj} \rightarrow \text{spoj} \rightarrow \text{spoj} \rightarrow \text{spoj} \rightarrow \text{spoj} \rightarrow \text{spoj}$$

$$\tau_1 = \text{spoj} \rightarrow \text{spoj} \rightarrow \text{spoj} \rightarrow \text{spoj} \rightarrow \text{spoj} \rightarrow \text{spoj} \rightarrow \text{spoj}$$

Obr. 2. Jednoduché překřížení

$$\tau_1 = \text{spoj} \rightarrow \text{spoj} \rightarrow \text{spoj} \rightarrow \text{spoj} \rightarrow \text{spoj} \rightarrow \text{spoj} \rightarrow \text{spoj}$$

$$\tau_1 = \text{spoj} \rightarrow \text{spoj} \rightarrow \text{spoj} \rightarrow \text{spoj} \rightarrow \text{spoj} \rightarrow \text{spoj} \rightarrow \text{spoj}$$

Obr. 3. Dvojité překřížení

2.3 OPTIMÁLNÍ REDUKCE SÍTĚ

Stává se, že některé město (kolem 20-50 tis. obyvatel), má velmi hustou síť ulic, po nichž autobusy jezdí ve velmi dlouhých časových intervalech (60, ba někdy i 120 min. Je to výsledek snahy dosáhnout dostupnosti zastávek MHD do třeba 350 m pro všechny cestující, žel, na úkor dostupnosti časové.

Je samozřejmé, že zastávky musí být bezprostředně dostupné u velkých zdrojů a cílů proudů cestujících (nádraží, obchodní centra, nemocnice, školy, úřady kulturní a sportovní stánky apod.). Ty budeme považovat za ***významné vrcholy grafu*** (sítě) a jejich množinu budeme označovat W, kdežto všechny dosavadní vrcholy budeme označovat V. Zřejmě $W \subset V$. Budeme předpokládat, že dosavadní síť, používaná MHD, je $G = (V, H, d)$, kde $d(h)$ je délka hrany $h \in H$. Tuto síť bychom rádi redukovali na menší podsíť, po které by už spoje jezdily v mnohem menších intervalech. Přitom zcela přirozeně žádáme, aby žádná trasa mezi významnými vrcholy se neprodloužila více než q násobně, kde obvykle $q \in \langle 1;\ 1{,}5 \rangle$. ***Matematická formulace*** je tato:

Daný je neorientovaný ohodnocený graf $G = (V, H, d)$, nejméně dvouprvková množina $W \subset V$ a číslo $q \in \langle 1; \infty)$. Úlohou je najít takový podgraf $G_o = (V_o, H_o, d_o)$, pro který platí:

$W \subset V_o$,

$d_o(h) = d(h)$ pro všechny $h \in H_o$,

$d_o(u, w) \leq q.d(u, w)$ pro všechny dvojice $u \in W$, $w \in W$,

$$\sum_{h \in H_o} d(h) \rightarrow \min$$

Zde symboly $d_o(u, w)$ a $d(u, w)$ vyjadřují vzdálenost vrcholů u a w, tj. délku nejkratší cesty mezi těmito vrcholy, na grafu G_o resp. G.

Není známo, že by tento problém byl v literatuře již plně vyřešen. V článku P. Czimermana et al. (2007) je dokázáno, že je obecně NP-těžký. Článek L. Caie a D.G. Corneila se zabývá různými typy podsítí stromového typu, což vnašem případě není splněno.

Autorka je členkou týmu, který chystá

- exaktní metodu řešení prohlížením stromu řešení do hloubky,
- exaktní metodu řešení pomocí celočíselného lineárního programování,

- speciální heuristickou metodu.

Poznámka 4. Úlohu lze aplikovat buď za předpokladu zachování počtu vozidlo-kilometrů, což zachovává náklady (ponechává stav ekonomického pilíře), ale vede ke zvýšení dostupnosti veřejné dopravy (upevnění sociálního pilíře). Je však zřejmé, že úlohu lze aplikovat tak, aby se dostupnost zvýšila méně, ale došlo ke snížení nákladů snížením celkového počtu kilometrů.

Poznámka 5. Stejnou matematickou úlohu lze aplikovat i v situaci, že orgán veřejné správy chce redukovat silniční síť, na jejíž údržbu mu nestačí prostředky.

LITERATURA

Cai, L., Corneil, D.G. (1995) *Tree Spanners*. SIAM J. Discrete Mathematics, Vol. 8, No. 3. pp. 359-387

Czimerman, P. , Černá, A., Černý, J., Peško, Š. (2007). *Network Reduction Problems.* Journal of Information , Control and Management Systems, 5, No. 2

Černá, A. (2008) *Metody operačního managementu*. Vydav. Oeconomica , Praha. ISBN 978-80-245-1325-6.

Černá, A., Černý, J. (2004). *Teorie řízení a rozhodování v dopravních systémech*. Vyd. Institut Jana Pernera v Praze. ISBN 80-86530-15-9.

Palúch, S. (1988), *Systém KASTOR na optimalizáciu obehových rozvrhov*. Zborník prác VÚD číslo 54.

Heizer, J,, Render, B. (2010) *Operations Management*.10th edition. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, USA, ISBN 978-0136119418.

INOVACE PŘEDMĚTU MATEMATIKA PRO EKONOMY NA VŠPJ

JANA BORŮVKOVÁ, MARTINA KUNCOVÁ

Abstrakt

Předmět Matematika pro ekonomy vyučovaný na VŠPJ v současnosti prochází vývojem, jehož cílem je přiblížit současnou výuku obecně zavedeným standardům. V článku jsou uvedeny důvody, které k inovaci předmětu Matematika pro ekonomy vedly. Dále je zde popsán výchozí stav, současný stav a i ideální stav, kterého by mělo být dosaženo v horizontu dvou let.

Nejdůležitější změnou, která umožňuje i změnu obsahu předmětu, je využití softwaru při řešení optimalizačních úloh. Využití softwaru umožní řešit úlohy komplexně – zadat ekonomický problém, který může být i složitější, zformulovat matematický model, ten s pomocí softwaru vyřešit a řešení interpretovat. Software dále umožňuje řešit úlohy celočíselného programování, případně upravovat model na základě výsledků citlivostní analýzy, což dosud nebylo možné.

Klíčová slova (keywords)

Inovace předmětu, lineární programování, LinPro, optimalizační metody, výuka

ÚVOD

Výuka předmětu Matematika pro ekonomy prochází v současné době jistým vývojem, jehož cílem je přiblížit obsah tohoto předmětu předmětům, které jsou běžně přednášeny na vysokých školách s ekonomickým zaměřením pod názvem Operační výzkum nebo Lineární programování.

1 NÁPLŇ KURZU MATEMATIKA PRO EKONOMY

V porovnání s jinými vysokými školami, kde se podobné předměty vyučují, je v předmětu MEK dán výrazně větší prostor základům lineární algebry (Stolín 2007). V předchozích letech tvořila lineární algebra téměř 50 % náplně, protože MEK byla prerekvizitou pro předmět Matematická analýza II, ve kterém byli studenti odkazováni na znalosti z lineární algebry. Po změně studijních plánů, která spočívala v tom, že MEK byla přesunuta do třetího semestru, tedy až za Matematickou analýzu, nebylo již nezbytně nutné zachovávat v MEK všechny dříve přednášené pasáže. Ty části lineární algebry, které nejsou dále při řešení úloh lineárního programování nezbytné, bylo možné vypustit a díky tomu vznikl prostor pro rozšíření ekonomického modelování.

Původně se studenti kromě základů lineární algebry seznamovali s následujícími tématy (více viz Lagová, Jablonský 2009):

- vytvoření matematického modelu úlohy LP,
- grafické řešení soustavy lineárních nerovnic včetně nalezení optimálního řešení,
- jednofázová simplexová metoda,
- dvoufázová simplexová metoda,
- formulace duálně sdružené úlohy včetně stínových a redukovaných cen,
- duální simplexová metoda,
- dopravní úloha – stanovení výchozího řešení, test optima, optimalizace.

Nově byla z lineární algebry ponechána následující témata:

- Gaussova eliminační metoda,
- vektory – lineární kombinace vektorů, lineární závislost a nezávislost,
- matice – operace sčítání matic, násobení matice reálným číslem a násobení matic; inverzní a transponovaná matice;

determinant (výpočet jen pro matice řádu 2 a 3); hodnost matice,

- soustavy lineárních rovnic a nerovnic – obecné a základní řešení, Jordanova metoda, grafické řešení.

V rámci lineárního programování přibyla dvě témata:

- intervaly stability pravých stran,
- intervaly stability cenových koeficientů.

2 ZAVEDENÍ VÝPOČTŮ S POMOCÍ SOFTWARU

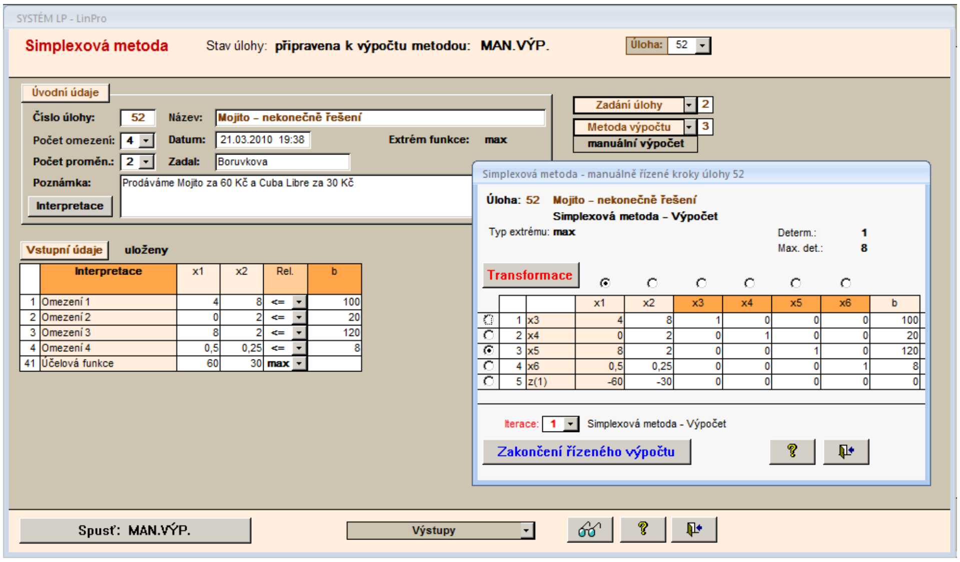
Další kvalitativní změnu obsahu umožnilo využívání aplikace LinPro, kterou vyvinula doc. Lagová pro studenty VŠE[18]. V příštím roce plánujeme získat na nákup tohoto softwaru pro naše studenty prostředky z FRVŠ. V letošním školním roce jsme začali používat bezplatnou zjednodušenou verzi programu LinPro a výsledkem by mělo být otestování programu ve výuce. Program LinPro by měl umožnit řešit i náročnější příklady, které se přibližují ekonomické praxi, i když řešení skutečných ekonomických problémů je vždy značně složitější záležitost.

V minulých letech, kdy jsme ve výuce MEK nepoužívali žádný software, mohly být na cvičení počítány pouze velmi jednoduché příklady, které byly často zadávány již jako matematické modely a neumožňovaly tedy to nejcennější – jednak vytvořit matematický model na základě slovní formulace ekonomického problému, jednak interpretovat všechny výsledky.

Využití počítače a programu LinPro přinese zautomatizování rutinních a zdlouhavých výpočtů, ve kterých se navíc velmi často chybuje. Aplikace umožní studentovi jak výpočet všech iterací a jejich postupné zobrazení tak i vlastní řešení (uživatel volí sám klíčové prvky a na závěr vybere z nabídky, jaké je zakončení výpočtu). To znamená, že student může pomocí tohoto softwaru procvičovat postupy, které byly používané při řešení úloh lineárního programování před zavedením softwaru do výuky a tím ještě lépe pochopit podstatu

[18] Více viz http://jana.kalcev.cz/vyuka/index.php?Akce=Predmet&Skola=1

řešení problému. Ukázka manuálního výpočtu tj. volby klíčového prvku a zakončení výpočtu je na obrázku 1.



	Interpretace	x1	x2	Rel.	b
1	Omezení 1	4	8	<=	100
2	Omezení 2	0	2	<=	20
3	Omezení 3	8	2	<=	120
4	Omezení 4	0,5	0,25	<=	8
41	Účelová funkce	60	30	max	

		x1	x2	x3	x4	x5	x6	b
1	x3	4	8	1	0	0	0	100
2	x4	0	2	0	1	0	0	20
3	x5	8	2	0	0	1	0	120
4	x6	0,5	0,25	0	0	0	1	8
5	z(1)	-60	-30	0	0	0	0	0

Obr. 1: Ukázka manuálního výpočtu v programu LinPro

Využitím a přínosem počítačů pro výuku lineárního programování a optimalizačních metod se zabývá řada autorů (např. Lagová 2008 nebo Lagová, Kalčevová 2008). Pokud se při výuce ukáže, že přínos využití softwaru v oblasti zrychlení výpočtů je natolik významný, že bude možné řešit i další typy příkladů, mohly by být zařazeny zejména metody celočíselného programování, protože požadavek celočíselnosti proměnných je samozřejmý u celé řady konkrétních úloh (kusová výroba, řezání tyčí apod.). Mezi celočíselné úlohy patří také dopravní úloha a přiřazovací problém a problém batohu.

3 CELOČÍSELNÉ PROGRAMOVÁNÍ

Některé úlohy mají své speciální metody, kde požadavek celočíselnosti není omezením, protože řešení dostaneme vždy v celých číslech. Pro ostatní celočíselné úlohy je požadavek celočíselnosti dalším omezením. Řešíme-li takovou úlohu klasickou simplexovou metodou, můžeme dostat optimální řešení neceločíselné. Někdy v praxi postačí zaokrouhlení na nejblíže nižší celá čísla, ale obecně se nemusí takto získané řešení shodovat s celočíselným optimálním řešením.

Nejznámějším algoritmem řešení celočíselných úloh je tzv. *Gomoryho algoritmus (Lagová, Jablonský 2009).* V dnešní době se však stává oblíbenější tzv. *metoda větví a mezí*, kterou zde popíšeme podrobněji (Klingerová 1997).

Principem této metody je rozklad množiny přípustných řešení na disjunktivní podmnožiny a následné prošetřování těchto podmnožin. Jádro problému tedy spočívá v konstrukci dodatečných podmínek, tj. v zužování množiny přípustných řešení.

Uvažujme, že řešíme úlohu lineárního programování: Nalezněte maximum lineární funkce $z = \mathbf{c}^T.\mathbf{x}$ při splnění podmínek $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ a $\mathbf{x} \geq \mathbf{o}$, kde složky vektoru $\mathbf{x}$ jsou celá čísla.

Předpokládejme, že jsme nalezli optimální řešení, jehož některé (nebo všechny) složky x_i nesplňují podmínku celočíselnosti. Postupujeme následovně:

1. Vybereme libovolné x_i z optimálního řešení, které není celočíselné. Zvolíme interval:

   $$p \leq x_i \leq q,$$

   kde p je nejbližší menší celé číslo a q nejbližší větší celé číslo vzhledem k x_i. (Vzhledem k tomu, že celočíselné řešení není uvnitř intervalu (p, q), hledáme ho vně.)

2. Přidáme k původní úloze další podmínku ve tvaru:

   a. $x_i \leq p$ a dále řešíme,

   b. $x_i \geq q$ a dále řešíme.

3. Z optimálních řešení úloh 2a) a 2b) vybereme tu větev, která má vyšší hodnotu účelové funkce z.

4. V případě, že optimální řešení nadějnější větve ještě není celočíselné, opakujeme postup popsaný výše a přidáme k úloze, která odpovídá větvi s lepší hodnotou účelové funkce další podmínku ve tvaru:

   a. $x_j \leq r$ a dále řešíme,

   b. $x_j \geq s$ a dále řešíme.

Tento postup opakujeme, dokud nedospějeme k *celočíselnému optimálnímu řešení.* Z uvedeného algoritmu je zřejmé, že bez využití softwaru by se úlohy celočíselného programování daly počítat jen s velkými obtížemi. Využití softwaru zde tedy spočívá v tom, že studenti zadají naformulovaný problém a program jim spočítá neceločíselné řešení. Následně si opět studenti zformulují dodatečná omezení, která do původního modelu postupně přidávají, aby se dostali k řešení celočíselnému. Program tedy slouží především k urychlení výpočtů.

4 ZÁVĚR – CÍLOVÉ ŘEŠENÍ

Závěrem uvádíme návrh cílového řešení obsahu předmětu Matematika pro ekonomy na VŠPJ:

1. Základy lineární algebry – matice, vektory, determinant
2. Řešení soustavy lineárních rovnic a nerovnic
3. Formulace úloh LP, tvorba matematického modelu
4. Grafické řešení úlohy LP
5. Jednofázová simplexová metoda
6. Dvoufázovoá simplexová metoda
7. Duálně sdružená úloha
8. Intervaly stability
9. Celočíselné programování

10. Problém batohu

11. Dopravní problém

12. Přiřazovací problém

Cílem navržených úprav je přiblížit současnou výuku obecně zavedeným standardům. Studenti se naučí nejen formulovat matematické modely, ale především využít software k jejich řešení, tj. následně mohou, na základě výsledků citlivostní analýzy, model upravovat a znovu řešit, což dosud nebylo možné.

Literatura

Klingerová, P.: *Lineární programování*. Liberec, 1997. Diplomová práce. TU Liberec.
Dostupné z WWW: <http://www.mti.tul.cz/files/oa/linprog/index.htm>.

Lagová, M., Jablonský, J.: *Lineární modely*. Praha, Oeconomica 2009, ISBN 978-80-245-1511-3

Lagová, M., Kalčevová, J.: Automatic Testing Framework for Linear Optimization Problems. Liberec 17.09.2008 - 19.09.2008. In: *Mathematical Methods in Economics* 2008 [CD-ROM]. Liberec : TU FE, 2008, s. 320-325. ISBN 978-80-7372-387-3.

Lagová, M., Kalčevová, J.: Počítače ve výuce optimalizačních modelů. České Budějovice 04.06.2008 - 05.06.2008. In: *Pedagogický software 2008* [CD-ROM]. České Budějovice : Scientific Pedagogical Publishing, 2008, s. 1-3. ISBN 80-85645-59-9.

Lagová, M.: Proč a jak využívat počítače ve výuce lineárního programování. Praha 02.12.2008 - 04.12.2008. In: *Medzinárodný seminár mladých vedeckých pracovníků*. Praha : Oeconomica, 2008, s. 1-10. ISBN 978-80-245-1405-5.

Stolín, R.: *Matematika pro ekonomy*. Jihlava, VŠPJ, 2007.

Kontaktní adresy:

RNDr. Jana Borůvková, Ph.D.

Tolstého 16, Jihlava

boruvkova@vspj.cz

Ing. Martina Kuncová, Ph.D.

Tolstého 16, Jihlava

kuncova@vspj.cz

MATEMATIKA A JEJÍ APLIKACE NA FAKULTĚ MANAGEMETU VŠE

JAN ČERNÝ [1*)]

Abstrakt.

Autor, jako garant výuky matematiky na Fakultě managementu VŠE v Jindřichově Hradci (zkráceně FM), prezentuje ve svém příspěvku nejdříve tři hlavní cíle výuky a dále nastiňuje její rozsah, obsah a pojetí jak v současnosti, tak i v perspektivách chystané inovace studia.

Ve druhé části uvádí příklady toho, jak se mohou matematika na jedné a ekonomie s managementem na straně druhé navzájem pozitivně ovlivňovat. Jedná se o výsledky konkrétní spolupráce pracovníků fakulty s praxí v minulosti i současnosti.

Klíčová slova (keywords):

Matematika, metoda, náklady, optimalizace, výuka.

ÚVOD

Příprava budoucích inženýrů byla, je a bude zřejmě spjata s výukou matematiky. Týká se to i inženýrů (a bakalářů) ekonomie a managementu, i když sem-tam narazíme na výjimky, a to zejména

- na českých školách, o které je malý zájem a tak se rozhodly získat další uchazeče heslem „U nás vystudujete bez matematiky!“ – avšak k malému porozumění ze strany Akreditační komise MŠMT,
- na renomovaných školách zahraničních, které však silnou vysokoškolskou matematiku vyžadují jako prerekvizitu k přijetí

[1*)] Prof. RNDr. Jan Černý, DrSc., Dr.h.c., Fakulta managementu Vysoké školy ekonomické, Jarošovská 1117/II, 37701 Jindřichův Hradec, tel. 384417203, e-mail cerny@fm.vse.cz

na studium, např. na HAAS Business School univerzity v Berkeley, California, USA.

Pokusme se nejdřív zamyslet nad tím, proč to tak je a jaký užitek může přinést matematická příprava budoucím ekonomům a manažerům.

1 VÝZNAM VÝUKY MATEMATIKY NA EKONOMICKÝCH A MANAŽERSKÝCH FAKULTÁCH

Matematika je součástí profesní přípravy budoucích bakalářů a inženýrů v ekonomicko-manažerských oborech proto, že se od jejího zařazení očekává zvýšení kompetencí absolventů.

1.1 NÁSTROJ NA ŘEŠENÍ PRAKTICKÝCH PROBLÉMŮ

V povědomí veřejnosti je poměrně vžitá představa, že matematika se na ekonomicko-manažerských vysokých školách a fakultách učí hlavně proto, aby ji absolventi používali na řešení svých problémů v praxi.

Tento názor je částečně správný, je to jedním z cílů. Není však pravdou, že hlavním. V různých anketách mezi absolventy FM VŠE vychází najevo, že i za několik let po absolutoriu nemuseli s využitím vysokoškolské matematiky řešit nějaký praktický problém nikdy, nebo jen velmi zřídka. Naopak několik málo z nich se dokonce chlubí, jak své kolegy překvapili svou schopností vyřešit konkrétní praktický problém takto vyřešit.

Navíc si mnozí neuvědomují, že když se třeba řídí pravidlem „vyměnit stroj za nový je nutno tehdy, když očekávané náklady na příští období převýší náklady průměrné“, není toto pravidlo založené jen na něčí zkušenosti, ale že je dokázáno matematicky. A takových pravidel je nemálo.

1.2 JAZYK, POUŽÍVANÝ ODBORNOU LITERATUROU

Studenti musí prostudovat na kila odborných knih, zejména o ekonomii a managementu. Navíc, proces jejich sebevzdělávání nekončí promocí a nástupem do zaměstnání.

Pokud by studovali na špičkových světových univerzitách setkávali by se s knihami, které vysvětlují ekonomii (zejména mikro-) matematicky. A to nejen ve výuce matematiky, kde by to mohla být kniha A.C. Chianga a K. Wainwrighta (2005), ale přímo v hodinách ekonomie třeba kniha H.R. Variana (1992) nebo „super tlustospis“ A. Mas-Colella et al. (1995). Bez znalostí vysokoškolské algebry a analýzy by to nebylo možné.

1.3 LOGICKÉ, STRUKTURÁLNÍ A NUMERICKÉ MYŠLENÍ

Kdyby byl slavný oštěpař Železný ve svých trénincích nedělal nic jiného, kromě neustálého házení oštěpem, sotva by byl dosáhl tak skvělých výkonů. Protože však dělal hodně cviků, které sice v závodě nevyužil, ale posílily mu svalstvo (které naopak využil plně), stal se světovým rekordmanem a olympijským vítězem. Vidíme, že příprava nemusí obsahovat právě jen tu činnost, na kterou se připravujeme.

Kdybychom si vypsali odbornosti rektorů všech českých a slovenských univerzit od roku 1990, zjistili bychom, že mezi nimi mají matematici mnohem vyšší zastoupení, než by odpovídalo jejich počtu mezi všemi učiteli. A můžeme se ptát, proč je akademické obce a později senáty volily, co si na nich cenily? Pravděpodobně to, že uměli logicky myslet, strukturovat rozhodovací problémy a v případě potřeby je i správně propočítat.

Tyto tři typy myšlení bude v praxi potřebovat každý absolvent ekonomie a managementu bez výjimky. A je jisté, že žádný jiný předmět je neposiluje tak, jako právě matematika. A to je její hlavní význam. I když ani to, že absolvent bude moci studovat kvalitní odborné knihy a vyřešit případné matematické problémy není jistě k zahození.

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Vysoká škola polytechnická Jihlava
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

1.4 VÝKA MATEMATIKY NA FM VŠE

Nutno rozlišovat tato období:

- **Do 1998**. FM byla součástí JČU, stanovovala si studijní programy sama. Matematika byla dvousemestrální 3-3 (přednášky-cvičení), obsahovala standardní „inženýrskou" matematiku mimo plošných integrálů, ale se slušnými základy teorie pravděpodobnosti a numerických metod.

- **1998-2006**. FM se stala součástí VŠE a převzala její unifikované dvousemestrální osnovy, předepsanou literaturu a hodiny 2-2. Probíraly se i diferenční rovnice, ale žádné křivkové ani dvojné, natož plošné integrály, až na Simpsonovo pravidlo žádné numerické metody a pravděpodobnost byla přesunuta do statistiky. Výklad každého tématu byl doprovázen ukázkami aplikací.

- **Od 2006**. Po začlenění VŠE do organizace CEMS (Community of European Management Schools) a do systému ECTS (European Credit Transfer and Accumulation System) se matematika zúžila na 2-2 jednosemestrální „Matematiku pro ekonomy" (žádné diferenční rovnice, z řad jen geometrické, žádná analytická geometrie, žádné aplikace atd.). FM si to kompenzovala zavedením předmětu „Aplikovaná matematika" 2-2.

- **Od 2011**? Má dojít k další redukci matematiky v rámci „inovací". Uvidíme, co se podaří matematikům uhájit a co ne.

2 PŘÍKLADY PRAKTICKÝCH APLIKACÍ

V této kapitole si uvedeme některé příklady aplikací matematiky v ekonomicko-manažerské praxi. Matematické modely a metody zde navrhli, anebo na jejich návrhu spolupracovali, pracovníci FM.

2.1 OPTIMÁLNÍ VELIKOST DENNÍ PRODUKCE

Předpokládejme, že velký podnik plánuje vybudovat řadu svých provozoven (např. mlékáren, cihelen apod.), které své vstupy získávají na své náklady z tím většího území, čím je větší denní produkce provozovny a podobně na své náklady svými produkty zásobují území, které roste s velikostí denní produkce. U nabídky vstupů i poptávky po produktech předpokládáme, že jsou rovnoměrně rozděleny na ploše území.

Je-li denní produkce x, je zřejmé, že celkové výrobní náklady na tuto produkci budou ve tvaru

$$TPC(\mathrm{x}) = a + bx$$

kde a jsou fixní a b variabilní náklady, a tedy průměrné výrobní náklady na jednotku produkce budou

$$APC(x) = a/x + b$$

Předpokládejme, že $x = 1$ (jednotkové množství produkce) má průměrnou délku dopravy vstupů do provozovny d_1, průměrné náklady na přepravu těchto vstupů c_1, průměrnou délku dopravy produktů zákazníkům d_2 a průměrné náklady na přepravu těchto produktů c_2.

Z předpokladu o rovnoměrném rozdělení nabídky vstupů i poptávky po produktech na ploše území můžeme vyvodit, že je-li produkce x jednotek, jsou tyto délky a náklady po řadě

$$d_1x^{1/2},\ c_1xx^{1/2} = c_1x^{3/2},\ d_2x^{1/2},\ c_2xx^{1/2} = c_2x^{3/2}\ .$$

Odůvodnění: Kdyby se vstupy těžily na kruhové ploše o poloměru r, byla by průměrná vzdálenost bodu od středu $2r/3$, tedy průměrná vzdálenost bodu kruhu od středu je konstantním násobkem poloměru. Má-li však jiný kruh o poloměru r' x-násobný obsah, tj. $\pi r'^2 = x\pi r^2$, potom $r' = rx^{1/2}$ a tedy i průměrná vzdálenost je $x^{1/2}$-násobná.

Z toho už vyplývá, že celkové dopravní náklady

$$TCT(x) = c_1x^{3/2} + c_2x^{3/2} = (c_1 + c_2)x^{3/2} = cx^{3/2}$$

kde $c = (c_1 + c_2)$.

Průměrné dopravní náklady na jednotku produkce potom budou

$ACT(x) = cx^{1/2}$

Pro součet průměrných výrobních a dopravních nákladů (na jednotku produkce) potom platí

$AC(x) = APC(x) + ACT(x) = a/x + b + cx^{1/2}$

Snadno se dokáže, že funkce $AC(x)$ dosahuje minimum pro

$x = (2a/c)^{2/3}$.

2.2 ALOKACE INVESTIC DO STAVBY VYSOKORYCHLOSTNÍ TRATI

Předpokládejme, že trasa vysokorychlostní trati je zatím rozdělena na úseky $u_i = (a_{i-1}, a_i)$, $i = 1, ..., n$, kde poloha bodů a_i je závazná, kdežto detailní trasa po každém úseku se ještě má volit z mnoha možností. Přitom pro každý úsek u_i je známý interval technicky dosažitelných minimálních jízdních dob $T_i = \langle d_i, h_i \rangle$ pro průjezd úsekem a pro každé $t_i \in T_i$ jsou dané náklady $c_i(t_i)$ na vybudování úseku tak, aby minimální možná jízdní doba byla t_i.

Pro navrhovatele je daná závazná minimální možná jízdní doba t přes celou trať z a_0 do a_n, splňující nerovnost

$d_1 + ..., + d_n \leq t \leq h_1 + ..., + h_n$

Úlohou je zvolit dílčí jízdní doby $t_1, ..., t_n$ tak, aby $t_1 + ... + t_n = t$ a aby se minimalizovala hodnota celkových nákladů

$c_1(t_1) + ... + c_1(t_n)$

Je zřejmé, že se jedná o úlohu diskrétního dynymického programování, řešitelnou pomocí Bellmanova principu.

2.3 OPTIMÁLNÍ ZROVNOMĚRNĚNÍ ZÁTĚŽE/BENEFITŮ

Daná je matice $M = (c_{i,j})$ typu $m \times n$. Daná je míra nestejnosti $f(x_1, ..., x_m)$. Úlohou je najít pro každé j permutaci $p_j(1), ..., p_j(m)$ prvků v j-tém sloupci tak, aby řádkové součty nové matice M' ve sloupcích permutované podle $p_1, ..., p_n$

$$s_i = \sum_{j=1}^{n} c_{p_j(i),j}$$

minimalizovaly hodnotu $f(s_1, ..., s_m)$.

Příklad. Nechť $m = 3$, $n = 4$,

$$f(x, y, z) = \max\{x, y, z\} - \min\{x, y, z\}$$

$$M = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 9 & 5 \\ 7 & 3 & 5 & 4 \\ 5 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Vhodnou permutací prvků v jednotlivých sloupcích dostaneme matici

$$M' = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 9 & 4 \\ 8 & 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

jejíž řádkové součty jsou 19, 20, 20, což je zřejmě optimální řešení s mírou nestejnosti $f(19, 20, 20) = 1$.

Tuto úlohu jako první zformuloval doc. Š. Peško ze Žiliny a my jsme se podíleli na jejím řešení. Je popsána v článku J. Černého a Š. Peška (2006). Aplikace má například tehdy, když m pracovníků má na n dnů splnit mn úkolů, přičemž číslo m_{ij} představuje buď zátěž, anebo benefit ze splnění i-tého úkolu j-tého dne. Permutace určují přiřazení úkolů pracovníkům v daném dnu. Cílem je dosáhnout, aby součet zátěží resp. benefitů byl mezi pracovníky co „nejstejnější“ (a tito neměli pocit křivdy).

2.4 OPTIMÁLNÍ VOLBA TRASY LINKY

Nechť $G = (V, E, q, d)$ je graf dopravní sítě s délkou hran d, představující pěší chůzi. Nechť funkce q: $V \rightarrow \langle 0; \infty)$ vyjadřuje přepravní poptávku ve vrcholech. Nechť $d(u, v)$ je vzdálenost vrcholů u, $v \in V$ získaná pomocí délek hran. Nechť $W \subset V$ jsou možná umístění zastávek a $GW = (W, F, \delta)$ je graf komunikací sjízdných pro autobusy s délkou hran δ (ne nutně stejnou s d ani na $E \cap F$). Nechť $\delta(S)$ je délka nejkratší cesty, spojující vrcholy množiny S na GW pro každou podmnožinu $S \subset W$. Nechť $\lambda \in (0;\infty)$ je maximální přípustná střední docházková vzdálenost a nechť

$$q = \sum_{v \in V} q(v).$$

Úlohou je najít takovou množinu zastávek $S \subset W$, aby střední docházková vzdálenost cestujících na zastávku nepřekročila hodnotu λ:

$$\mu(S) = \frac{1}{q} \sum_{v \in V} q(v) d(v, S) \leq \lambda,$$

a aby se minimalizovala délka linky

$$\delta(S) \rightarrow \min$$

O této úloze jsme zatím dokázali, že je NP-těžká a vytvořili pro ni:

- exaktní metodu a software, založené na prohledávání stromu řešení do hloubky,
- formulaci¨pomocí celočíselného lineárního programování,
- měkolik heuristických metod

a chystáme o tom článek.

Dlužno poznamenat, že zatím předpokládáme, že náklady na vybudování a obsluhu linky jsou úměrné její délce. Pokud by tomu tak nebylo, můžeme v úloze funkce δ vzít tyto náklady místo délky.

LITERATURA

Černý, J., Peško, Š. (2006) *Uniform Splitting in Managerial Decision Making*. Ekonomie a Management, 9, No. 4, 67-71.

Chiang, A. C., Wainwright , K. (2005) *Fundamental Methods of Mathematical Economics*. McGraw-Hill, London.

Mas-Colell, A., Whinston, M.D., Green, J.R. (1995) Microeconomic theory. Oxford University Press, Oxford.

Varian, H.R. (1992) *Microeconomic Analysis, Third Edition*. W. W. Norton & Company, New York

METÓDY OPERAČNEJ ANALÝZY NA VYSOKÝCH ŠKOLÁCH A V PRIEMYSELNÝCH PODNIKOCH

HENRIETA HRABLIK CHOVANOVÁ[19], MARTIN HRABLIK[20], ĽUBICA ČERNÁ[21]

Abstrakt

Článok sa zaoberá charakteristikou výučby predmetu Operačná analýza (príbuzné predmety) na VŠ v SR a v ČR. Vyzdvihuje dôležitosť poznania metód operačnej analýzy (operačného výskumu) ako konkurenčnú výhodu pre absolventov VŠ, ktorí sa stanú súčasťou riadenia podnikov pri prijímaní správnych rozhodnutí v priemyselných podnikoch.

Kľúčové slová (keywords)

Absolvent, operačná analýza, rozhodovanie, metódy operačnej analýzy.

ÚVOD

Význam práce je nesporný pre každého jedinca aj pre absolventa. Jeho zamestnanie je súčasťou sociálnej a osobnostnej integrity, ktorú si pomáha zachovávať formou identity. Vzhľadom na význam práce a zamestnania v našej spoločnosti niet pochýb o tom, že nezamestnanosť má silný vplyv na spoločenský život aj na život absolventov. (Laca, 2010, s. 61) Vzdelanie, predovšetkým primárne, podmieňuje výber povolania, ktorého charakter umožňuje alebo

[19] Henrieta Hrablik Chovanová, Ing. PhD., STU MTF UPMK, Paulínska č.16, 917 24 Trnava, tel. +421908646 032, e-mail: henrieta.chovanová@stuba.sk

[20] Martin Hrablik, Ing., STU MTF UPMK, Paulínska č.16, 917 24 Trnava, tel. +421908646 032, e-mail:martin.hrablik@stuba.sk

[21] Ľubica Černá, doc. Ing. PhD., STU MTF UPMK, Paulínska č.16, 917 24 Trnava, tel. +421908646 032, e-mail: lubica.cerna@stuba.sk

neumožňuje získavanie dostatočných prostriedkov na uspokojovanie širokého spektra ľudských potrieb. (Kotradyová, 2010, s. 55) Štúdium na vysokej škole (VŠ) v súčasnosti naberá stále väčší význam, o čom svedčia aj požiadavky Európskej únie o navýšení počtu vysokoškolských študentov a tým zväčšujúci sa počet súkromných VŠ, a taktiež rozširovanie odborov a výučby na štátnych/verejných VŠ. Situáciu na trhu práce každoročne ovplyvňuje aj príchod nových absolventov VŠ, ktorí ukončili svoje štúdium a chcú začať svoju kariéru najlepšie vo vyštudovanom odbore. Konkurencia je vysoká a uplatní sa len ten, kto má vedomosti a zručnosti, ktoré podniky hľadajú a aj niečo navyše. Jednou z konkurenčných výhod je aj ovládanie metód operačnej analýzy.

1. OPERAČNÁ ANALÝZA

Operačná analýza je disciplínou využívanou už desiatky rokov pri hľadaní optimálnych riešení zložitých problémov. Využíva jednak matematický aparát, jednak počítače a špecializovaný softvér. Názov je prekladom z anglického Operational Research, stretávame sa aj s anglickým pomenovaním Management Science, prípadne s českým označením operačný výskum, či ekonomicko-matematické metódy, kvantitatívne metódy v ekonómii apod. (Kuncová, 2008) Uplatnenie a význam metód operačnej analýzy sa v súčasnosti zvyšuje. Metódy operačnej analýzy napomáhajú k správnym rozhodnutiam manažérov, na ktorých je založené efektívne fungovanie (v súčasnosti v niektorých prípadoch až prežitie) podnikov. Práve pre predchádzajúce dôvody je potrebné absolventov VŠ pripraviť na samostatné rozhodovanie sa, v ktorom im môže pomôcť aj poznanie a schopnosť aplikácie práve metód operačnej analýzy.

V roku 2007 sa na českých VŠ uskutočnil prieskum (uskutočnený VŠE Praha) výučby predmetu operačná analýza/operačný výskum (podobné predmety). Výsledkom bolo zistenie, že na 20 VŠ sa daný predmet (metódy operačnej analýzy) v nejakej forme vyučuje. Na základe získaných informácií vyplynulo, že výučba operačnej analýzy je najširšia na Vysokej škole ekonomickej v Prahe a Českej zemědělskej univerzite (Praha), kde sú vytvorené odbory tohto zamerania, a taktiež na Univerzite Pardubice. V rámci prieskumu sa zisťoval stav aj na slovenských VŠ, tu sa podarilo porovnať výučbu na piatich VŠ. Výsledkom bolo zistenie, že najlepšou je Ekonomická univerzita v Bratislave a že výučba predmetu je zameraná na praktické využitie metód. Tým, že informácie boli vo väčšine prípadov čerpané z www stránok VŠ (prístup k niektorým informáciám je obmedzený/zamedzený) do porovnania sa nedostala Slovenská technická univerzita v Bratislave, kde je ale predmet (jeho metódy) zaradený do vyučovacieho procesu aj na viacerých fakultách.

Na Materiálovotechnologickej fakulte je predmet Operačná analýza (vo vyučovacom procese je zaradený už viac ako 20 rokov) od roku 2009 zaradený ako celoplošný predmet vyučovaný v zimnom semestri v prvom ročníku na druhom stupni VŠ štúdia. Každoročne sa s metódami operačnej analýzy oboznámi cca 1000 študentov ekonomických a technických odborov fakulty. Obsah predmetu korešponduje s najviac vyučovanými oblasťami operačnej analýzy (zistených v prieskume v ČR), sú to: úvod/história operačnej analýzy, matematické a lineárne programovanie (grafické a numerické riešenie, Simplexová metóda, dualita, dopravné úlohy, postoptimalizačné úvahy a pod.), sekvenčné metódy, sieťová analýza (metódy: CPM, PERT, MPM, GERT), modely hromadnej obsluhy a modely obnovy. Na vyučovacom procese sa väčšina precvičovaných úloh/problémov rieši nie len ručným výpočtom ale aj prostredníctvom softvérovej podpory (QSB2), čo umožňuje riešiť zložité/komplexné úlohy rýchlo a jednoducho. K ďalším predmetom, kde sa študenti stretávajú s metódami operačnej analýzy, patria napríklad: Logistika, Manažment výroby a Projektový manažment.

K najčastejšie využívaným metódam operačnej analýzy patria práve metódy sieťového plánovania/metódy projektového manažmentu, medzi ktoré patrí metóda kritickej cesty (CPM) a metóda PERT. Dané metódy sa používajú v každodennej praxi podnikov, pretože väčšina podnikoch rieši svoje úlohy/činnosti práve prostredníctvom projektov. Na Materiálovotechnologickej fakulte sa študenti oboznamujú s teóriou projektov na predmete Projektový manažment, a na cvičeniach daného predmetu pracujú na svojich projektoch, ktoré spracovávajú pomocou softvéru MS Project.

Pri prezeraní www stránok ponúkajúcich voľné pracovné miesta nachádzame veľké množstvo podnikov, ktoré absolventov so znalosťami s používaním softvéru MS Project vyhľadávajú a čoraz častejšie dané znalosti vyžadujú.

2. PODNIKY A ABSOLVENTI

Spolupráca podnikov so školskými inštitúciami v súčasnej praxi je prirodzenou súčasťou procesu získavania a rozvoja zamestnancov, ktorá má charakter dlhodobej spolupráce popísanej rámcovými dohodami medzi zúčastnenými stranami.

Podniky k takémuto získavaniu nových zamestnancov pristupujú v nadväznosti na uvedené zistenia analýzy možností, keď je zrejmé, že lokálny trh práce nemá súčasný potenciál ani tendenciu uspokojiť personálne plány spoločnosti v ďalších obdobiach. Nejde však o jednorazové riešenie v danom čase, ale je súčasťou širšieho personálneho plánu, ktorý ráta s periodicitou vzdelávacieho procesu, ktorá je nevýhodou tejto metódy. Výhod je však viac:

- predvýber a odporučenie vhodných absolventov podniku, podnik má teda viac informácii o potenciálnom zamestnancovi,

- možnosť vopred, už počas štúdia dohodnúť rámcový pracovný kontrakt s absolventom (v súlade s jeho preferenciami a záujmami) a jeho zaradenie do organizácie na danú pozíciu. Uľahčuje sa personálne plánovanie.

Okrem prípravy absolventov bez praxe však podniky ťažia z tejto metódy aj v iných oblastiach:

- Zvyšovanie kvalifikácie zamestnancov (resp. aj jej získanie a rozširovanie) ktorých si podnik chce naďalej udržať a rozvíjať. Najmä v regiónoch so slabou ponukou pracovných síl je rozvoj (a povyšovanie vhodných) cestou k udržaniu kvalitných pracovných síl.

- Zvyšovanie efektivity podnikových procesov, výrobných a technologických postupov.

- Popri regionálnej súvislosti trhu práce podniky účinne riešia otázku profesií, ktoré svojou povahou, pracovnou náplňou, kvalifikačnými požiadavkami sú nové – napr. rôzny IT či iní špecialisti.

3 ZÁVER

Spôsob prípravy nového zamestnanca na mieru, ktorého podnik hľadá, sa stáva novým fenoménom/prioritou vyučovacieho procesu škôl. VŠ, ale aj stredné odborné školy, sa snažia pripravovať absolventov s takými znalosťami, zručnosťami a skúsenosťami, aké podniky vyžadujú, preferujú a hľadajú.

Predmetom záujmu v operačnej analýze je riadenie komplexných systémov, kde rozhodovanie vykonáva jednotlivec alebo riadiaci kolektív a kde práve základné metódy operačnej analýzy majú pre kvalifikované rozhodovanie riadiacich subjektov dodávať vedecky zdôvodnené podklady. (Máca, 2002) Absolvent, ktorý sa s metódami operačnej analýzy oboznámi počas svojho štúdia, môže mať konkurenčnú výhodu pred tými, ktorí danú problematiku neabsolvovali, pretože ich rozhodnutia budú podložené a vo väčšine prípadov aj správne.

Manažérska prax je založená na neustálom prijímaní rozhodnutí. Pri čoraz väčšom množstve informácií podstatných pre rozhodovanie je riešenie problémov často úlohou pre celý kolektív odborníkov rôznych profesií, a zvyčajne býva kontroverzné. Aby sa predišlo vytvoreniu súboru subjektívnych rozhodnutí na rôznych úrovniach riadenia, je potrebné vykonať kvantitatívne analýzy stavu a priebehu ekonomických procesov ako podklad pre objektivizáciu rozhodnutí a ich argumentáciu (Ivaničová, 2002).

Článok bol vypracovaný v rámci projektu VEGA 1/0491/09: **„Kontrola vyspelosti procesov projektového manažmentu ako nástroj zvyšovania konkurencieschopnosti strojárskych priemyselných podnikov.“**

LITERATÚRA

BESTVINOVÁ, V. - VIDOVÁ, H. - URDZIKOVÁ, J. Kľúčové prvky hodnotenia univerzitného vyučovacieho procesu. In *Vedecké práce*. 2008, č. 25, s. 15-19.

ČERNÁ, Ľ. - HRABLIK, M. Zamestnávanie absolventov na súčasnom trhu práce. In *Humanitné vedy a ich význam pri vzdelávaní a rozvoji kľúčových kompetencií študentov vysokých škôl technického zamerania.* Košice: TU, 2010, s. 105-110. ISBN 978-80-553-0523-3.

HRABLIK CHOVANOVÁ, H. - JAKÁBOVÁ, M. - ŠUJANOVÁ, *J. The use of network Analysis Methods to eliminate risks in project management.* In *CO-MAT-TECH 2007*. 2007, s. 144-146, ISBN 978-80-8096-032-2.

IVANIČOVÁ, Z. - BREZINA, I. - PEKÁR. J. *Operačný výskum*. Bratislava: Ekonómia, 2002, s. 287, ISBN 80-89047-43-2.

KOTRADYOVÁ, K.: Rómska problematika v kontexte vzdelávania. In *Generácia Y vstupuje na trh práce*. Trnava : Nezávislé kresťanské odbory Slovenska, 2010. ISBN 978-80-970464-3-9.

KUNCOVÁ, M.. LAGOVÁ, M. Srovnání výuky a simulací na vysokých školách v ČR a SR. In *ERIE 2008 – Efficiency and Responsibility in Education*. [online] Praha: ČZU PEF, 2008, s.107–115. ISBN 978-80-213-1796-3.URL: http://erie.pef.czu.cz/Documents/Sborník_ERIE.pdf.

LACA, S.: Nezamestnanosť ako aktuálny problém mladej generácie. In *Generácia Y vstupuje na trh práce*. Trnava : Nezávislé kresťanské odbory Slovenska, 2010. ISBN 978-80-970464-3-9.

MÁCA, J. - LEITNER, B. *Operačná analýza I. Deterministické metódy operačnej analýzy.* Žilina: FŠI ŽU, 2002. [online].[cit. 2010-02-25] Dostupné na <:http://fsi.uniza.sk/ktvi/publikacie/11_operanal1_u_2002.pdf.>.

URDZIKOVÁ, J. - VIDOVÁ, H. - MOLNÁROVÁ, D. Vzdelávanie a metódy hodnotenia vzdelávacieho procesu pri výučbe manažérskych predmetov. In *Inovácie 2008*. Trnava: AlumniPress, 2008, s. 44-49. ISBN 978-80-8096-062-9.

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Vysoká škola polytechnická Jihlava
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VÝPOČET RPSN PŘI VÝUCE FINANČNÍ MATEMATIKY

ANDREA KUBIŠOVÁ

Abstrakt

Na VŠP Jihlava se ve výuce předmětu Základy finanční matematiky během jednoho semestru věnujeme se studenty různým typům úročení, sestavení hodnotové rovnice, spoření, důchodům, umořování dluhů a poté výpočtům spojeným s cennými papíry. V kapitole týkající se matematických základů investičního rozhodování vznesli studenti dotaz, jak chápat zákonem definovaný ekonomický ukazatel RPSN, případně proč nestojí na jeho místě například roční úroková míra či vnitřní míra výnosnosti. Článek se zabývá porovnáním těchto tří ekonomických ukazatelů z hlediska vypovídací hodnoty a obtížnosti výpočtu.

ÚVOD

Během diskuse se studenty, tedy lidmi ve věkové kategorii mezi 20. a 25. rokem života, navíc se společným zájmem o volitelný předmět ZFM, mne překvapil vysoký počet těch, kteří již mají či plánují mít zkušenost se spotřebitelským úvěrem. Následuje Tabulka 1, která popisuje rozdělení četností odpovědí na uzavřenou otázku: „Doplňte: Spotřebitelský úvěr …“ nabízející pět variant odpovědi.

Odpověď	Absolutní četnost	Relativní četnost
Znám, využívám	3	0,14
Znám, nevyužívám	10	0,48
Znám, zvažuji využívat	5	0,24
Nevyužívám, brání mi nedostatečná znalost	2	0,10
Nedovedu odpovědět	1	0,05
Celkem	**21**	**1,00**

Tabulka 1

Pouze dva studenti z 20, kteří dovedli na otázku odpovědět, připustili, že jim ve využívání tohoto moderního finančního produktu brání nedostatečná znalost. Všech 48% studentů, jejichž odpověď začínala slovem „Znám“, potvrdilo, že se jedná o spotřebitelský úvěr spadající do zákonem vymezené kategorie 5 - 800 tisíc Kč, kde je ve smlouvě ze zákona povinné RPSN uvést. Jsou to tedy právě oni, kterých se zákon č. 321/2001 Sb. o spotřebitelském úvěru, a tedy i zákonná možnost využití výpočtu RPSN, týká.

Dle informací získaných na internetu navíc označovali RPSN za rozporuplný ukazatel. Chtěli výpočtem vybrat, která z variant splácení úvěru ve výši 50 000 Kč je výhodnější: a) na konci následujících 60 měsíců 1 200 Kč nebo b) na konci následujících 12 měsíců 5 000 Kč. Před výpočtem se klonili k výhodnosti varianty b), kde je na úrocích celkově vyplaceno o 12 000Kč méně.

Domluvili jsme se tedy na postupu naší práce. Nejprve jsme společně zopakovali definice zmíněných ukazatelů, pomocí nich se studenti pokusili samostatně, případně s dopomocí rozhodnout nastolený příklad a nakonec proběhla diskuse ke srozumitelnosti a obtížnosti provedených výpočtů.

1 DEFINICE UKAZATELŮ

Nejprve jsme definovali všechny pojmy. Čerpali jsme z přílohy zákona č. 321/2001 Sb. a z přednášek.

RPSN

Roční procentní sazba nákladů na spotřebitelský úvěr se vypočítá podle následujícího vzorce:

$$\sum_{K=1}^{K=m} \frac{A_K}{(1+i)^{t_K}} = \sum_{K'=1}^{K'=m'} \frac{A'_{K'}}{(1+i)^{t_{K'}}} \qquad (1)$$

kde:

K je pořadové číslo půjčky téže osoby

K´ je číslo splátky

A_K je výše půjčky číslo *K*

$A'_{K'}$ je výše splátky číslo *K´*

 značí celkový souhrn

m je číslo poslední půjčky

m´ je číslo poslední splátky

t_K je interval, vyjádřený v počtu roků a ve zlomcích roku, ode dne půjčky č. 1 do dnů následných půjček č. 2 až *m*

$t_{K'}$ je interval, vyjádřený v počtu roků a ve zlomcích roku, ode dne půjčky č. 1 do dnů splátek nebo úhrad poplatků č. 1 až *m´*

i je hledaná roční procentní sazba nákladů na spotřebitelský úvěr, kterou je možno vypočítat (buď algebraicky nebo numericky opakovanými aproximacemi na počítači), jestliže jsou hodnoty ostatních veličin rovnice známy buď ze smlouvy nebo odjinud.

Roční úroková míra

Veškeré půjčky a splátky týkající se posuzovaného úvěru nazývejme obecně finanční toky. Předpokládejme, že se jejich výplaty mohou realizovat pouze na koncích ukončených *m*-tin roku a k výpočtu výše úroků připsaných na konci každého úrokovacího období v délce 1/*m* roku se používá složená úroková míra, kterou označíme $i^{(m)}/m$. Ze sestavené hodnotové rovnice odpovídající tomuto složenému úročení můžeme vyjádřit neznámou úrokovou míru $i^{(m)}/m$, nebo lépe její obvykleji uváděný *m*-násobek, nazývaný nominální úroková míra, přičemž je nutné dodat, jaké frekvenci připisování složeného úroku odpovídá. Nejčastěji se setkáváme s měsíční variantou úročení, tedy $m = 12$.

Jako referenční bod pro výpočet časových hodnot všech finančních toků zvolme vždy okamžik prvního realizovaného finančního toku. Čas realizace posledního z finančních toků označme *n*. Hodnotová rovnice je potom ve tvaru

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{C_j}{\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{C'_j}{\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^j}. \qquad (2)$$

Vnitřní míra výnosnosti

Vnitřní míra výnosnosti investice je výnosnost investice za vhodně zvolenou časovou jednotku. Vhodnou volbou se rozumí, že všechny finanční toky C_j této investice se uskuteční v čase j od počátku investice, přičemž *j* jsou přirozená čísla, čas realizace posledního z finančních toků označme *n*.

Vnitřní míra výnosnosti IRR se vypočítá z následujícího vzorce

$$0 = \sum_{j=0}^{n} \frac{C_j}{(1+IRR)^j}, \qquad (3)$$

je to tedy úroková míra, při které je současná hodnota investice nulová, která je ovšem vztažena k oné zvolené časové jednotce.

Vzhledem k potřebě porovnávání výhodnosti investic je vhodný přepočet této nominální úrokové míry odpovídající zvolené jednotce 1/*m* roku na roční efektivní úrokovou míru podle

$$i_e = \left(1 + \frac{IRR}{m}\right)^m . \qquad (4)$$

Tímto způsobem jsme vlastně očistili výsledek od vlivu volby *m*.

2 VÝPOČET

K vyjádření neznámých i, $i^{(m)}/m$, IRR z výše zapsaných rovnic jsme použili nástroje „Hledání řešení“ (Data – Analýza hypotéz) v MS Excel. Výpočty jsou k nahlédnutí v příloze, lze je využít jako „kalkulačky“. Nastavená buňka obsahující vzorec je ve žlutě podbarvené buňce, měněná buňka obsahující po provedení iterací výsledek je ohraničená černě. Zapišme pouze celkové výsledky:

1. a) 16,53, b) 41,30,
2. a) 15,40, b) 35,07,
3. a) 16,46, b) 41,29.

3 DISKUSE

RPSN

Nejprve bylo třeba rozepsat do tabulky jednotlivé částky a čas uplynulý od počátku úvěru k jejich realizaci ve zlomcích roku.

Po sestavení vzorce stačilo nechat vyhledat hodnotu *i*.

Studentům činilo problém pochopení principu výpočtu, včetně zvolené terminologie, zprvu nezvyklý převod všech časových intervalů na zlomek roku. Matoucí pro ně byla možnost volby způsobu bez udání kriterií.

Běžným pro ně nakonec byl výpočet diskontního činitele.

Neznámou jsme získali pomocí nástroje „Hledání řešení“. Na internetu se hojně využívají naprogramované kalkulačky. Získávali jsme stejné výsledky, jako dávala kalkulačka na stránkách ČOI.

Úroková míra

Nebylo třeba rozepsat do tabulky jednotlivé částky, pokud se pravidelně opakují, stačí vhodně dosadit do funkce ÚROKOVÁ.MÍRA.

Výše částek a čas uplynulý od počátku úvěru k jejich realizaci ve počtech *m*-tin roku jsme ovšem také lehce rozkopírovali do tabulky a využili při sestavování vzorce (ve žlutě podbarvené buňce). Neznámou $i^{(m)}/m$ jsme potom též získali pomocí nástroje „Hledání řešení“. Výstupem je opět „kalkulačka“.

Sestavení hodnotové rovnice je studentům dobře známé. Zapomínalo se vynásobit získanou hodnotu číslem *m* k zažitému způsobu vyjádření nominální hodnoty $i^{(m)}$.

Velkou nevýhodou se ukázalo, že není možné do pravidelných splátek přičíst nepravidelné poplatky, realizované v jiných okamžicích, než na koncích *m*-tin roku, protože se vymykají frekvenci příslušného složeného úročení

Tuto metodu, kterou studenti původně navrhovali za nejjednodušší, nakonec pro nevhodnost rovnou zavrhují.

Vnitřní míra výnosnosti

Nejprve bylo třeba rozepsat do tabulky jednotlivé částky a čas uplynulý od počátku úvěru k jejich realizaci v počtech *m*-tin roku, které ovšem nebyly dány způsobem složeného úročení, ale bylo třeba je vhodně zvolit tak, aby byl každý z finančních toků realizován na konci některé z nich. Tento úkol studenti označili jako pro běžného občana nejobtížnější.

Po sestavení vzorce ve žlutě podbarvené buňce jsme hodnotu IRR získali pomocí nástroje „Hledání řešení“. Výstupem je opět „kalkulačka“.

Trénovaní studenti dovedou do vzorce (3) správně dosadit údaje z příkladu. Bylo však nutné připomenout význam efektivní a nominální úrokové míry.

Celkové porovnání

Ukázalo se, že úroková míra je jako ekonomický ukazatel nevhodná z toho důvodu, že nelze aplikovat na splátkové kalendáře s platbami vymykajícími se frekvenci nastoleného typu složeného úročení. Při samých pravidelných platbách je nominální hodnota (*m*-násobek složené úrokové míry odpovídající nastolené časové jednotce o délce 1/m roku) nepraktická pro další výpočty, lépe je ji nahradit odpovídající roční efektivní úrokovou mírou. Tak jsme se z jiné strany dostali ke vnitřní míře výnosnosti, respektive odpovídající efektivní úrokové míře z (4).Druhou metodu zavrhují studenti nejdříve.

První a třetí metoda dávají velmi podobné výsledky, navzájem se potvrzují. Porovnávejme nadále pouze tyto dvě.

Vnitřní míra výnosnosti je pro studenty, kteří se bezpečně orientují v področních obdobách složených úrokových měr, přijatelnější. Bez této orientace je ovšem výpočet, na který ještě navazuje přepočet na efektivní úrokovou míru, velmi obtížný, počínaje potřebou vhodné časové jednotky.

Pro studenty samotné je překvapením, že soutěž o nejefektivnější ekonomický ukazatel s ohledem na nároky neškoleného člověka, vyhrává RPSN. Časová jednotka je dána, zvládnutí vyjádření času ve zlomcích roku je považováno za samozřejmost.

A ještě k příkladu: Zbývá vyslovit odpověď, proč se původní odhad výhodnosti tolik lišil od výsledků příkladů? Z posledních sloupců tabulek (porovnávajících diskontované hodnoty splátek) je patrné, že jsme podcenili časové rozložení splátek. V případě a) jsme na úrocích přeplatili „velkou“ částku, ale na dlouhém časovém úseku, zatímco v případě b) se „pouze“ desetitisícového přeplatku docílilo za mnohem kratší dobu. Studenti si v praxi ověřili, že při úročení má čas velký vliv.

Skutečné nalezení řešení je v každém z případů podmíněno komputerizací výpočtu, dle zákona „buď algebraicky nebo numericky opakovanými aproximacemi na počítači“. Nelze předpokládat, že běžný občan zvládne vzorec sestavit a bude znát cestu, jak výsledek získat. Nezbývá mu tedy než použít důvěryhodnou „kalkulačku“ a správně do ní své hodnoty dosadit.

Soubor s výsledky včetně výpočtů, ke kterým studenti dospěli, je v ucelené podobě přiložen, jde o zmíněné „kalkulačky“, které mohou být po zadání vašich vlastních hodnot půjček a splátek podrobeny „Hledání řešení“.

4 ZÁVĚR

Problém RPSN otevřený studenty pomohl upevnit již dosažené znalosti a zároveň ukázal praktické využití matematické teorie v běžné praxi. Upozornil též na úskalí spojená s rychlým posuzováním výhodnosti úvěrů. Poukázali jsme též na potřebu výpočetní techniky při řešení sestavených rovnic. MS Excel byl dostačujícím softwarem.

Příloha:

RPSN a IRR kalkulačka.xls

Kontaktní adresa:

Mgr. Andrea Kubišová

VŠP Jihlava, Tolstého 16

kubisova@vspj.cz

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Vysoká škola polytechnická Jihlava
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ